Valikvõistlus 2012

IMO'12 Eesti võistkonna valikvõistlus

22.–23. mai 2012 **Esimene päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Tõesta, et iga positiivse täisarvu k korral leidub k paarikaupa erinevat täisarvu, mille ruutude summa võrdub kuupide summaga.

2. Antud positiivse täisarvu n jaoks tuleb positiivsed täisarvud $a_0, a_1, \dots$ valida nii, et kehtivad järgmised tingimused:

(1) iga i korral $a_i = a_{i+n}$;

(2) ühegi i korral arv a_i ei jagu arvuga n;

(3) iga i korral arv a_{i+a_i} jagub arvuga a_i.

Milliste positiivsete täisarvude $n > 1$ korral on see võimalik ainult siis, kui arvud $a_0, a_1, \dots$ on kõik võrdsed?

3. Kõõlnelinurgas $ABCD$ on $|AD| > |BC|$ ja tipud C ja D asuvad ümberringjoone lühemal kaarel AB. Kiired AD ja BC lõikuvad punktis K, diagonaalide AC ja BD lõikepunkt on P. Sirge KP lõikab külge AB punktis L. Tõesta, et ALK on teravnurk.

IMO'12 Eesti võistkonna valikvõistlus

22.–23. mai 2012 **Teine päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

4. Kolmnurgas ABC on $|AB| = |AC|$. Olgu P ja Q kolmnurga tippudest erinevad punktid vastavalt külgedel AB ja AC. Tõesta, et kolmnurga APQ ümberringjoon läbib kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkti parajasti siis, kui $|AP| = |CQ|$.

5. Olgu x, y, z väärtused positiivsed reaalarvud, mille summa on 2012. Leia avaldise

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)(x^3 + y^3 + z^3)}{(x^4 + y^4 + z^4)}$$

suurim võimalik väärtus.

6. Ruudustikul mõõtmetega $m \times m$ asuvad mõnede ühikruutude keskpunktides sipelgad. Alghetkel hakkab iga sipelgas liikuma kiirusega 1 paralleelselt ruudustiku mingi küljega, kuni kohtub vastassuunast tuleva sipelgaga või jõuab ruudustiku ääreni. Vastassuunast tuleva sipelgaga kohtumisel mõlemad sipelgad pööravad 90° võrra päripäeva ja jätkavad liikumist endise kiirusega; ruudustiku ääreni jõudmisel kukub sipelgas üle ääre maha.

a) Tõesta, et mingi aja möödudes on kõik sipelgad maha kukkunud.

b) Leia viimase sipelga kukkumise hiliseim võimalik hetk.

Отборочный конкурс на ММО'12

22–23 мая 2012 г. **Первый день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Доказать, что для каждого положительного целого числа k найдутся k попарно различных целых чисел, сумма квадратов которых равняется сумме их кубов.

2. Для данного положительного целого числа n выбирают числа $a_0, a_1, \ldots$ таким образом, что выполняются следующие условия:

(1) $a_i = a_{i+n}$ для каждого i;

(2) ни при каком i число a_i не делится на число n;

(3) при каждом i число a_{i+a_i} делится на число a_i.

При каких целых числах $n > 1$ это возможно только тогда, когда числа $a_0, a_1, \ldots$ все равны?

3. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ выполняется $|AD| > |BC|$, а вершины C и D расположены на меньшей дуге AB описанной окружности. Лучи AD и BC пересекаются в точке K, а P − точка пересечения диагоналей AC ja BD. Прямая KP пересекает сторону AB в точке L. Доказать, что угол ALK острый.

Отборочный конкурс на ММО'12

22–23 мая 2012 г. **Второй день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. В треугольнике ABC выполняется $|AB| = |AC|$. Пусть P и Q – отличные от вершин треугольника точки соответственно на сторонах AB и AC. Доказать, что описанная окружность треугольника APQ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда $|AP| = |CQ|$.

5. Пусть значения x, y, z – положительные действительные числа, сумма которых 2012. Найти наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)}{(x^4+y^4+z^4)}.$$

6. В центрах некоторых клеток клетчатой доски $m \times m$ сидят муравьи. В начальный момент времени каждый муравей начинает движение со скоростью 1 параллельно какой-то стороне клетчатой доски, пока не встретит муравья, движущегося в противоположном направлении, либо не достигнет края доски. При встрече с муравьём, идущим навстречу, оба муравья поворачивают на 90° по часовой стрелке и продолжают движение с прежней скоростью; при достижении края доски муравей падает за край.

а) Доказать, что через некоторое время все муравьи упадут за край доски.

б) Найти самый поздний возможный момент падения последнего муравья.

Lahendused

1. *Lahendus 1.* Iga täisarvu $m > 1$ korral rahuldavad arvud

$$2m^2+1, \quad m(2m^2+1), \quad -m(2m^2+1)$$

ülesande tingimusi, sest nad on paarikaupa erinevad ja

$$\begin{aligned} &(2m^2+1)^2+(m(2m^2+1))^2+(-m(2m^2+1))^2 \\ &\quad = (1+m^2+m^2)\cdot(2m^2+1)^2 \\ &\quad = (2m^2+1)^3 \\ &\quad = (1+m^3-m^3)\cdot(2m^2+1)^3 \\ &\quad = (2m^2+1)^3+(m(2m^2+1))^3+(-m(2m^2+1))^3. \end{aligned}$$

Seejuures m kasvades muutuvad kõik arvud neis kolmikutes kuitahes suureks, mistõttu iga selliste kolmikute hulga jaoks saab leida uue samal kujul kolmiku, milles kõik arvud on seni kasutatutest suuremad.

Suvalise positiivse täisarvu k jaoks saab esitada $k = 3q + r$, kus $0 \leqslant r < 3$. Võtame q kolmikut ülalleitud kujul, nii et arvud neis ei kordu. Kui $r = 1$, siis lisame neile arvu 0, ja kui $r = 2$, siis arvud 0 ja 1. Kuna iga grupi arvude ruutude summa võrdub kuupide summaga, siis ka kõigi k arvu ruutude summa võrdub kuupide summaga.

Märkus. Sobiva kolmikute jada saab avastada näiteks järgneva mõttekäiguga. Otsime kolmikuid kujul, kus kaks arvu on teineteise vastandarvud. Saame võrrandi $x^2 + 2y^2 = x^3$ ehk $2y^2 = x^2(x-1)$. Olgu $d = \text{SÜT}(x, y)$ ning olgu $x = dn$ ja $y = dm$. Siis $2m^2 = n^2(dn-1)$. Kui arvul n oleks mingi ühest erinev algtegur, siis m peaks ka selle teguriga jaguma, mis pole võimalik, seega $n = 1$ ning võrrand teiseneb kujule $2m^2 = d - 1$ ehk $d = 2m^2 + 1$. Arvu m vabalt valides saamegi lahenduse kolmikud.

Lahendus 2. Olgu m, n sellised positiivsed täisarvud, et $2m^2 = n^2 + n$ (sobivad näiteks $n = 8$, $m = 6$). Neliku $(-m, m, -n, n+1)$ liikmete ruutude summa ja kuupide summa on võrdsed, sest

$$\begin{aligned}(-m)^2+m^2+(-n)^2+(n+1)^2 &= 2m^2+n^2+(n+1)^2\\ &= 2m^2+2n^2+2n+1\\ &= n^2+n+2n^2+2n+1\\ &= 3n^2+3n+1\\ &= -n^3+(n+1)^3\\ &= (-m)^3+m^3+(-n)^3+(n+1)^3.\end{aligned}$$

Kui paar (m,n) rahuldab tingimust $2m^2=n^2+n$, siis ka paar (m',n'), kus $m'=2m(2n+1)$ ja $n'=8m^2$, rahuldavad sama tingimust — tõepoolest,

$$2(2m(2n+1))^2=8m^2(4n^2+4n+1)=8m^2(8m^2+1)=n'(n'+1)=(n')^2+n'.$$

Seega leidub lõpmata palju nelikuid, mille liikmete ruutude summa võrdub kuupide summaga, kusjuures konstruktsiooni põhjal koosnevad nelikud erinevatest arvudest.

Suvalise positiivse täisarvu k esitame kujul $k=4q+r$, kus $0\leqslant r<4$. Võtame q ühiste elementideta nelikut, mille liikmete ruutude summa võrdub kuupide summaga. Kui $r=1$, siis lisame neile juurde arvu 0, kui $r=2$, siis lisame juurde arvud 0 ja 1. Juhul $r=3$ lisame neile juurde arvud -2, -3 ja 4. Kõikidel juhtudel on saadud komplekti arvude ruutude summa võrdne kuupide summaga.

2. *Vastus:* kõigi algarvude korral.

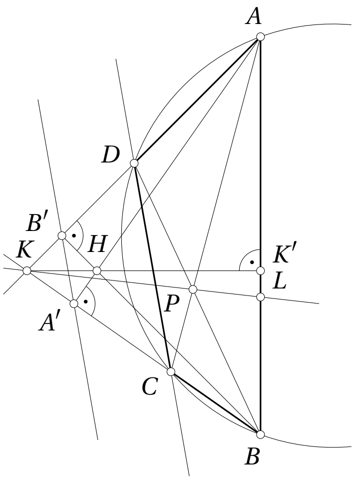
Vaatame juhtu, kus n on algarv. Ülesande tingimuse (1) põhjal on jadas $a_0,a_1,\ldots$ vaid lõplik hulk erinevaid arve. Kui mingi a_m on neist arvudest maksimaalne, siis ülesande tingimuse (3) põhjal peab ka a_{m+a_m} olema maksimaalne.

Näitame järgnevalt, et alati, kui mingi a_m on jada arvudest maksimaalne, on iga $k\geqslant 0$ korral ka $a_{m+k\cdot a_m}$ maksimaalne. Väide kehtib triviaalselt $k=0$ korral. Eeldame, et väide kehtib k korral, st $a_{m'+k\cdot a_{m'}}$ on maksimaalne jada iga maksimaalse liikme $a_{m'}$ puhul. Siis suvalise maksimaalse liikme a_m puhul

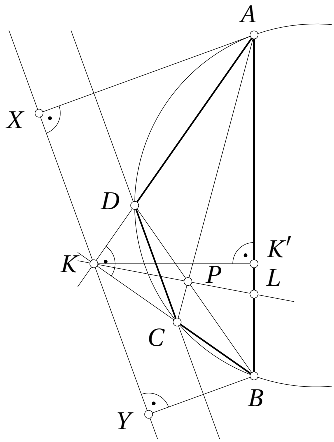
$$a_{m+(k+1)\cdot a_m}=a_{m+a_m+k\cdot a_m}=a_{m'+k\cdot a_{m'}}=a_{m'}=a_m,$$

kus $m'=m+a_m$. Seega matemaatilise induktsiooni printsiibi põhjal tõepoolest $a_m=a_{m+k\cdot a_m}$ iga $k\geqslant 0$ ja iga maksimaalse a_m korral.

Ülesande tingimuse (2) põhjal arv a_m ei jagu n-ga. Et n on algarv, siis arvud a_m ja n on ühistegurita. Seega arvudest kujul $m+k\cdot a_m$, kus $0\leqslant k<n$, kuulub üks igasse jäägiklassi n järgi. Seega on jada kõik arvud maksimaalsed, st nad on võrdsed.



Joonis 1



Joonis 2

Jääb üle vaadelda olukorda, kus n on kordarv; olgu m tema selline tegur, et $1 < m < n$. Valime iga $k < m$ korral $a_k = m + k \cdot n$ ja jätkame jada perioodiga m (st nii, et iga i korral $a_{i+m} = a_i$). Ülesande tingimus (1) on täidetud, kuna n on m kordne. Ülesande tingimus (2) kehtib samuti, sest $m < n$ tõttu annavad jada kõik arvud n-ga jagades jäägi m, mis on nullist erinev. Ülesande tingimuse (3) jaoks paneme tähele, et jada kõik arvud jaguvad m-ga. Seega i ja $i + a_i$ on alati samas jäägiklassis m järgi, sellest tulenevalt $a_i = a_{i+a_i}$. Samas pole jada kõik arvud võrdsed, kuna $m > 1$.

3. *Lahendus 1.* Kõõlnelinurga omadusest saame võrdused $\angle KAB = \angle KCD$ ja $\angle KBA = \angle KDC$. Olgu A', B', K' kolmnurga ABK vastavalt tippudest A, B, K tõmmatud kõrguste aluspunktid ning H kolmnurga ABK kõrguste lõikepunkt (joonis 1). Punktid A, B, A', B' on ühel ringjoonel, mistõttu $\angle KA'B' = \angle KAB$, kui vaid $A' \neq B'$. Seega A' ja B' asuvad samal lõiguga CD paralleelsel sirgel. Järgnevas tähistame seda sirget $A'B'$ ja loeme, et ka erijuhul $A' = B' = K$ ühtib sirge siht lõigu CD sihiga.

Tähistagu $d(X, l)$ punkti X kaugust sirgest l ja S_Δ kolmnurga Δ pindala. Tunnuse NN järgi $\triangle ACK \sim \triangle BDK$ ja $\triangle PAD \sim \triangle PBC$, kust $\dfrac{|AK|}{|BK|} = \dfrac{|AC|}{|BD|}$ ja $\dfrac{|AP|}{|BP|} = \dfrac{|AD|}{|BC|}$. Samas

$$\begin{aligned}
\frac{d(A, CD)}{d(B, CD)} &= \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{|AC| \cdot |AD| \cdot \sin \angle CAD}{|BD| \cdot |BC| \cdot \sin \angle CBD} = \frac{|AC|}{|BD|} \cdot \frac{|AD|}{|BC|}, \\
\frac{d(A, KP)}{d(B, KP)} &= \frac{S_{\triangle AKP}}{S_{\triangle BKP}} = \frac{|AK| \cdot |AP| \cdot \sin \angle KAP}{|BK| \cdot |BP| \cdot \sin \angle KBP} = \frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|AP|}{|BP|}.
\end{aligned}$$

Seega

$$\frac{|AL|}{|LB|} = \frac{d(A,KP)}{d(B,KP)} = \frac{d(A,CD)}{d(B,CD)}.$$

Võttes kõõlnelinurga $ABCD$ rolli punktidega A, B, A', B' määratud nelinurga, punkti P rolli H ning punkti L rolli K', saame analoogiliselt

$$\frac{|AK'|}{|K'B|} = \frac{d(A,KH)}{d(B,KH)} = \frac{d(A,A'B')}{d(B,A'B')}.$$

See võrdus kehtib ka erijuhul $A' = B' = K$. Tõepoolest, olgu punktide A ja B projektsioonid sirgele $A'B'$ vastavalt X ja Y (joonis 2), siis

$$\angle AKX = \angle KDC = \angle KBA = \angle AKK',$$
$$\angle BKY = \angle KCD = \angle KAB = \angle BKK',$$

mistõttu $\triangle AKX \cong \triangle AKK'$ ja $\triangle BKY \cong \triangle BKK'$. Siit $|AK'| = |AX|$, $|BK'| = |BY|$ ja $\dfrac{|AK'|}{|K'B|} = \dfrac{d(A,A'B')}{d(B,A'B')}$.

Et punktid C ja D asuvad lühemal kaarel AB, siis $\angle BCA = \angle BDA > \dfrac{\pi}{2}$. Seega sirge $A'B'$ asub punktidest A ja B kaugemal kui sirge CD. Et vastavalt ülesande tingimustele $|AD| > |BC|$, siis ka $\angle ABD > \angle CAB$ ja ühtlasi $\angle KBA > \angle KAB$, millest omakorda järeldub $|KA| > |KB|$. Seega $d(A,CD) + d(K,CD) > d(B,CD) + d(K,CD)$ ehk $d(A,CD) > d(B,CD)$. Kokkuvõttes

$$\frac{|AL|}{|LB|} = \frac{d(A,CD)}{d(B,CD)} > \frac{d(A,A'B')}{d(B,A'B')} = \frac{|AK'|}{|K'B|}.$$

Seega punkt L asub lõigul AB punktist A kaugemal kui punkt K', mistõttu $\angle ALK < \angle AK'K = \dfrac{\pi}{2}$, st nurk ALK on terav.

Lahendus 2. Tähistame $\alpha = \angle KAB = \angle KCD$, $\beta = \angle KBA = \angle KDC$, $\delta = \angle KAC = \angle KBD$ ja $\xi = \angle ALK$ (joonis 3). Siis

$$\angle KDB = \alpha + \beta - \delta = \angle KCA.$$

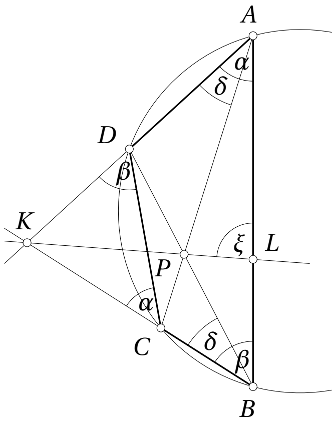
Tingimus $|AD| > |BC|$ esitub kujul $\beta > \alpha$ ning tingimus, et punktid C ja D asuvad ümberringjoone lühemal kaarel AB, on üles kirjutatav võrratusena $\alpha + \beta - \delta < 90^\circ$.

Kolmnurgas KCD saame

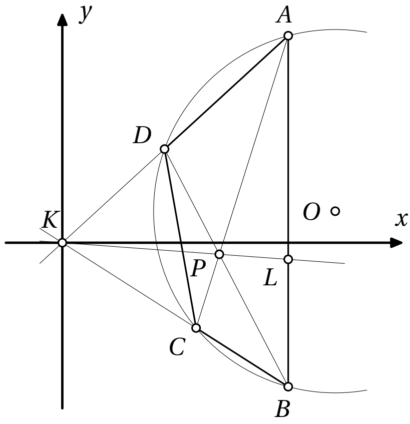
$$\frac{|KD|}{|KC|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \qquad (1)$$

Kolmnurkadest KDP ja KCP saame vastavalt

$$\frac{|KP|}{\sin(\alpha+\beta-\delta)} = \frac{|KD|}{\sin(\xi-(\beta-\delta))},$$



Joonis 3



Joonis 4

$$\frac{|KP|}{\sin(\alpha+\beta-\delta)} = \frac{|KC|}{\sin(\xi+(\alpha-\delta))}.$$

Järelikult

$$\frac{|KD|}{|KC|} = \frac{\sin(\xi-(\beta-\delta))}{\sin(\xi+(\alpha-\delta))}. \tag{2}$$

Võrdused (1) ja (2) kokku annavad

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin(\xi-(\beta-\delta))}{\sin(\xi+(\alpha-\delta))} = \frac{\sin\xi\cos(\beta-\delta)-\cos\xi\sin(\beta-\delta)}{\sin\xi\cos(\alpha-\delta)+\cos\xi\sin(\alpha-\delta)},$$

millest omakorda saame

$$\begin{aligned}\sin\xi\,\big(\sin\beta\cos(\beta-\delta)-\sin\alpha\cos(\alpha-\delta)\big)\\ =\cos\xi\,\big(\sin\beta\sin(\beta-\delta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\delta)\big).\end{aligned} \tag{3}$$

Ilmselt $\sin\xi > 0$ ja $\sin\beta\sin(\beta-\delta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\delta) > 0$, sest $\xi < \pi$ ja $\beta > \delta$, $\alpha > \delta$. Valemi $\sin x\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$ järgi saame

$$\sin\beta\cos(\beta-\delta)-\sin\alpha\cos(\alpha-\delta) = \frac{1}{2}(\sin(2\beta-\delta)-\sin(2\alpha-\delta)).$$

Et $\alpha+\beta-\delta < 90^\circ$, siis $(2\beta-\delta)+(2\alpha-\delta) < 180^\circ$ ehk leidub kolmnurk, mille kaks nurka on suurustega $2\beta-\delta$, $2\alpha-\delta$. Et $\beta > \alpha$, siis $2\beta-\delta > 2\alpha-\delta$, niisiis siinusteoreemist selles kolmnurgas tuleneb $\sin(2\beta-\delta) > \sin(2\alpha-\delta)$ (kolmnurga suurema nurga vastas on pikem külg). Seega võrduse (3) vasaku poole teine tegur on samuti positiivne. Kokkuvõttes ka $\cos\xi > 0$, kust $\xi < 90^\circ$.

Lahendus 3. Võtame koordinaatide alguspunktiks K ja mingu x-telg sealt risti lõiguga AB selle lõigu suunas. Üldisust kitsendamata olgu $A=(1,a)$ ja $B=(1,b)$, kus $a>0$ (joonis 4). Siis ülesande lahendamiseks piisab näidata, et punktil P on y-koordinaat negatiivne.

Sirgete KA ja KB võrrandid on vastavalt $y=ax$ ja $y=bx$. Olgu punkti D y-koordinaat d; siis $D=\left(\frac{d}{a},d\right)$.

Lõigu AB keskristsirge võrrand on $y=\frac{a+b}{2}$, lõigu DA keskristsirge võrrand aga $y=-\frac{1}{a}\cdot x+\frac{(a+d)(1+a^2)}{2a^2}$. Seega nelinurga $ABCD$ ümberringjoone keskpunkt on $O=\left(\frac{a(1-ab)+d(1+a^2)}{2a},\frac{a+b}{2}\right)$.

Lõigu BC keskristsirge võrrand on $y=-\frac{1}{b}\cdot x+\frac{a(1+b^2)+d(1+a^2)}{2ab}$, kuivõrd ta läbib punkti O. Kui $C=(x,y)$, siis BC keskpunkt on $\left(\frac{x+1}{2},\frac{y+b}{2}\right)$, mistõttu (x,y) rahuldab süsteemi

$$\begin{cases} \frac{y+b}{2} &= -\frac{1}{b}\cdot\frac{x+1}{2}+\frac{a(1+b^2)+d(1+a^2)}{2ab}, \\ y &= bx. \end{cases}$$

Siit $C=\left(\frac{d(1+a^2)}{a(1+b^2)},\frac{bd(1+a^2)}{a(1+b^2)}\right)$.

Edasi saame sirge AC võrrandiks

$$y=\frac{a^2(1+b^2)-bd(1+a^2)}{a(1+b^2)-d(1+a^2)}\cdot x+\frac{d(1+a^2)(b-a)}{a(1+b^2)-d(1+a^2)}$$

ja sirge BD võrrandiks $y=\frac{a(b-d)}{a-d}\cdot x+\frac{d(a-b)}{a-d}$.

Olgu $P=(z,p)$, siis saame süsteemi

$$\begin{cases} p &= \frac{a^2(1+b^2)-bd(1+a^2)}{a(1+b^2)-d(1+a^2)}\cdot z+\frac{d(1+a^2)(b-a)}{a(1+b^2)-d(1+a^2)}, \\ p &= \frac{a(b-d)}{a-d}\cdot z+\frac{d(a-b)}{a-d}, \end{cases}$$

mille teisest võrrandist saame $z=\frac{(a-d)p-d(a-b)}{a(b-d)}$. Asendades selle esimesse, saame p avaldada kujul

$$p = \frac{ad(b-a)(b-d)(1+a^2)-d(a-b)(a^2(1+b^2)-bd(1+a^2))}{a(b-d)(a(1+b^2)-d(1+a^2))-(a-d)(a^2(1+b^2)-bd(1+a^2))}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d(b-a)(b+a)(a(1+ab)-d(1+a^2))}{(b-a)(a^2(1+b^2)-d^2(1+a^2))} \\
&= \frac{d(b+a)(a(1+ab)-d(1+a^2))}{a^2(1+b^2)-d^2(1+a^2)}.
\end{aligned}
$$

Et C asub lõigul KB, siis $x < 1$ ehk $\dfrac{d(1+a^2)}{a(1+b^2)} < 1$ ehk $d(1+a^2) < a(1+b^2)$. Tegurid on siin positiivsed, seega $0 < d < a$ tõttu $d^2(1+a^2) < a^2(1+b^2)$ ehk nimetaja $a^2(1+b^2) - d^2(1+a^2)$ on positiivne.

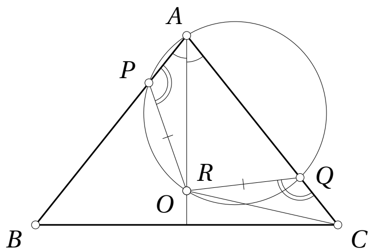
Jääb näidata, et lugeja on negatiivne. Et $|AD| > |BC|$, siis $\angle ABK > \angle BAK$, mistõttu $b + a > 0$. Et punktid C ja D asuvad lühemal ümberringjoone kaarel AB, siis punkti O x-koordinaat on suurem vertikaalse külje AB omast ehk $\dfrac{a(1-ab)+d(1+a^2)}{2a} > 1$, mis on samaväärne võrratusega $d(1+a^2) > a(1+ab)$. Järelikult kolmas tegur lugejas on negatiivne ja kogu lugeja samuti.

Lahendused

4. Üldisust kitsendamata $|AP| \leqslant |AQ|$. Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt. Olgu R nurga BAC poolitaja lõikepunkt kolmnurga PAQ ümberringjoonega — siis ühtlasi $|RB| = |RC|$ (joonis 5). Piirdenurga omaduste põhjal $\angle APR = 180° - \angle AQR = \angle CQR$ ning $|RP| = |RQ|$, sest $\angle RAP = \angle RAQ$. Seega

$$|AP| = |CQ| \iff \triangle APR \cong \triangle CQR \iff |RA| = |RC| \iff R = O$$

(kus $|RA| = |RC| \Rightarrow \triangle APR \cong \triangle CQR$ tunnusega KKN, sest võrdne nurk on täis- või nürinurk).



Joonis 5

5. *Vastus:* 2012.

Kui $x = y = z = \dfrac{2012}{3}$, siis

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)}{(x^4+y^4+z^4)} = \frac{3\left(\frac{2012}{3}\right)^2 \cdot 3\left(\frac{2012}{3}\right)^3}{3\left(\frac{2012}{3}\right)^4} = 3\left(\frac{2012}{3}\right) = 2012.$$

Näitame nüüd, et ülesande tingimuste kehtides alati

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)}{(x^4+y^4+z^4)} \leqslant 2012.$$

Selleks piisab näidata, et $(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3) \leqslant 2012(x^4+y^4+z^4)$ ehk

$$(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3) \leqslant (x+y+z)(x^4+y^4+z^4). \qquad (4)$$

Korrutades lahti, koondades vasakust ja paremast poolest ühised liikmed x^5, y^5, z^5 ning viies kõik järelejäänud liikmed ühele poole, jõuame samaväärse võrratuseni

$$x^4y+x^4z+xy^4+y^4z+xz^4+yz^4-x^3y^2-x^3z^2-x^2y^3-y^3z^2-z^2z^3-y^2z^3 \geqslant 0.$$

Rühmitades samu muutujaid sisaldavad liikmed kokku ja tegurdades, saame

$$xy(x-y)(x^2-y^2)+xz(x-z)(x^2-z^2)+yz(y-z)(y^2-z^2) \geqslant 0.$$

Kuna igas korrutises on suluavaldised ühemärgilised, on kõik korrutised mittenegatiivsed, mistõttu vajalik võrratus kehtibki.

Märkus. Võrratus, mille saame seoses (4) sulgude avamisel ja x^5, y^5, z^5 koondamisel, järeldub otse Muirheadi võrratusest (astendajate vektoriteks tuleb võtta $(4,1,0)$ ja $(3,2,0)$).

6. *Vastus:* b) $\frac{3}{2}m-1$.

Lahendus 1. Olgu koordinaatide alguspunkt laua vasakus alumises nurgas. Lihtsuse mõttes läheme üle kaks korda väiksematele pikkus- ja ajaühikutele; siis laua ruudud on suurusega 2×2, ruutude keskpunktide koordinaadid on paaritud positiivsed täisarvud ning sipelgate kiirus on endiselt 1.

Tõestame induktsiooniga, et täisarvulistel ajahetkedel on kõigi sipelgate asukohakoordinaadid täisarvud, kusjuures iga sipelga kahe asukohakoordinaadi summa on sama paarsusega nagu ajahetk. Hetkel 0 on kõik koordinaadid paaritud, mistõttu kahe koordinaadi summad on paaris. Eeldame, et hetkel t väide kehtib. Kui kaks sipelgat kohtuvad järgneva ajaühiku jooksul, siis nad peavad teineteise poole liikuma hiljemalt alates hetkest t, seega nende üks koordinaat on sama. Kuna kahe sipelga koordinaatide summade paarsus on hetkel t ühesugune (vastav hetkele t), siis teine asukohakoordinaat peab sel hetkel erinema vähemalt 2 võrra. Järelikult sipelgad ei kohtu enne hetke $t+1$. Hetkede t ja $t+1$ vahel muutub iga sipelga üks koordinaat 1 võrra, mistõttu koordinaatide summa paarsus hetkel $t+1$ võrdub $t+1$ paarsusega.

Järgnevalt tõestame induktsiooniga, et täisarvuliste koordinaatidega punktis (x,y) ei toimu ühtki vastassuunas liikuvate sipelgate kohtumist pärast hetke $x+y-2$. Juhul $x=y=1$ on see ilmne, sest vasaku alumise ruudu keskpunktile ei saa läheneda vastassuundadest. Vaatame nüüd suvalist punkti (x,y) ja eeldame väite kehtivust kõigi punktide jaoks, mille koordinaatide summa on väiksem. Oletame, et hetkel t kohtuvad punktis (x,y) vastassuundadest tulevad sipelgad. Üks neist peab tulema punktist, kus üks koordinaat on väiksem; üldisust kitsendamata olgu see koordinaat

x. Kui see sipelgas pole seni suunda muutnud, siis $t \leqslant x-1 \leqslant x+y-2$. Kui aga sipelgas muutis viimati suunda hetkel $t' < t$, siis viimase pöördepunkti koordinaadid olid $(x-(t-t'), y)$. Induktsiooni eelduse kohaselt $t' \leqslant x-(t-t')+y-2$, millest järeldub $t \leqslant x+y-2$.

Eelmisest väitest järeldub, et mingist hetkest alates liiguvad sipelgad ainult sirgjooneliselt ja kukuvad maha. Olgu (x, y) mingi sipelga viimase pöörde koht lähima nurga suhtes, kusjuures loeme üldisust kitsendamata, et $x \leqslant y$. Pöördekohast kukkumiseni kulub maksimaalselt $2m-x$ ajaühikut ning eelneva põhjal kukub see sipelgas hiljemalt hetkel $x+y-2+2m-x$. Et $y \leqslant \frac{2m}{2} = m$, siis kukkumine toimub hiljemalt hetkel $3m-2$. Algsetes ühikutes on see hetkel $\frac{3}{2}m-1$.

Iga m korral saab see hetk realiseeruda, kui algselt on laual kaks sipelgat kahes sama servaga piirnevas nurgaruudus ja liiguvad teineteise poole. Hetkel $\frac{m-1}{2}$ nad kohtuvad: üks sipelgas veereb üle ääre $\frac{1}{2}$ ajaühiku pärast, teine aga kukub maha hetkel $\frac{m-1}{2}+m-\frac{1}{2}$ ehk $\frac{3}{2}m-1$.

Lahendus 2. a)-osa saab lahendada ka järgnevalt. Vaatleme iga sipelga kaugust servast, mille suunas ta liigub (mahakukkunud sipelga kauguseks loeme 0). Kindlas suunas liikumisel see kaugus kahaneb kiirusega 1.

Vaatleme kõigi nende kauguste summat. Pöörde ajal on kohtuvate sipelgate kauguste summa m ja seda nii enne kui pärast pööret. Seega seni, kuni laual on veel sipelgaid, väheneb vaadeldavate kauguste summa kiirusega vähemalt 1. Kuna alghetkel on see lõplik arv, jõuab see summa lõpuks nulliks, mis tähendab, et kõik sipelgad on maha kukkunud.

Hindamisskeemid

1. *(Oleg Košik)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Näidatud, et ülesanne on lahendatud, kui õnnestub leida lõpmata palju ülesande tingimusele vastavaid arvukolmikuid: 1 p
- Lisaks sellele otsitud kolmikuid kujul $(d^2, -cd^2, cd^2)$ ning ülesanne taandatud probleemile leida lõpmata palju täisruute kujul $\frac{k(k+1)}{2}$: 4 p

2. *(Laur Tooming)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Õige vastus: 1 p
- Põhjendus algarvulise n korral: 3 p
- Konstruktsioon kordarvulise n korral: 3 p

Konkreetse n väärtuse, nt $n = 2$, läbivaatamise eest anti 1 punkt.

3. *(Heiki Niglas)* Täislahenduse eest oleks antud 7 punkti.

Mitmed lahendajad olid pannud tähele, et tekib palju sarnaseid kolmnurki ja paar õpilast olid isegi kasutanud Menelaose ja Ceva teoreemi, aga ükski lahendaja ei teinud olulisi lahenduse suunas viivaid samme.

Hindamisskeemid

4. *(Indrek Zolk)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Pole kuhugi jõutud: 0 p
- Tõestatud mõni oluline tähelepanek ühe poole tõestuses (vajalike nurkade võrdsus, kolmnurkade kongruentsus vms): 2 p
- Tõestatud järeldumine ühes suunas: 4 p
- Tõestatud järeldumine ühes suunas ning teistpidi implikatsiooni tõestuseks esitatud vajalikke elemente: 5 p
- Peaaegu täielik lahendus (mingi ebatäpsus või põhjendamata koht): 6 p
- Täielik lahendus: 7 p

5. *(Urve Kangro)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et kui kõik arvud on võrdsed, siis avaldise väärtus on 2012: 1 p
- Seose $x + y + z = 2012$ abil teisendatud avaldis homogeenseks: 3 p
- Sobivalt rühmitades (või näiteks Muirheadi või ümberjärjestusvõrratuse abil) näidatud, et avaldise väärtus ei saa olla suurem kui 2012: 3 p

Ühe punkti (skeemi esimese rea asemel) sai ka tähelepaneku eest, et kui $x \to 2012$ ja $y, z \to 0$, siis avaldise väärtus läheneb arvule 2012.

6. *(Härmel Nestra)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Lahendatud a)-osa: 2 p
- Lahendatud b)-osa: 5 p

  Sealhulgas:

  - Õige vastus $\frac{3}{2}m - 1$ koos korrektse näitega, kuidas seda saavutada: *1 p*

a)-osas võis saada 1 punkti, kui arutlus tõi välja lahenduses olulisi momente, kuid ei sidunud neid korralikult veenvaks aruteluks. Samuti oli võimalus b)-osa tõestuses saada hea, kuid ammendavaks arutluseks vormimata idee eest 1 punkti.