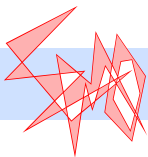


Valikvõistlus 2011

| | | | |
|------------------------------|----------|------------------------|-----------|
| Ülesanded | 2 | Lahendused | 6 |
| Esimene päev | 2 | Esimene päev | 6 |
| Teine päev | 3 | Teine päev | 9 |
| Ülesanded vene keeles | 4 | Hindamisskeemid | 16 |
| Первый день | 4 | Esimene päev | 16 |
| Второй день | 5 | Teine päev | 17 |



IMO'11 Eesti võistkonna valikvõistlus

20.–21. aprill 2011

Esimene päev

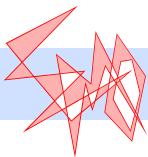
Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kaks ringjoont asuvad tervikuna teineteisest väljas. Olgu A nende ringjoonte sisemiste ühispuutujate lõikepunkt ning K selle punkti projektsioon ringjoonte välisele ühispuutujale. Punktist K tõmmatud, ühispuutujast erinevad puutujad puutuvad ringjooni punktides M_1 ja M_2 . Tõesta, et sirge AK poolitab nurga M_1KM_2 .
2. Olgu n positiivne täisarv. Tõesta, et arvu $1 + 2 + \dots + n$ iga teguri m korral, kus $m \geq n$, saab hulga $\{1, 2, \dots, n\}$ tükeldada lõikumatuks alamhulkadeks nii, et iga alamhulga elementide summa on m .
3. Kas leidub selline tehe $*$ kõigi täisarvude hulgal, mis rahuldab korraga järgmisi tingimusi:
 - (1) suvaliste täisarvude x, y, z korral $(x * y) * z = x * (y * z)$;
 - (2) suvaliste täisarvude x, y korral $x * x * y = y * x * x = y$?



IMO'11 Eesti võistkonna valikvõistlus

20.–21. aprill 2011

Teine päev

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

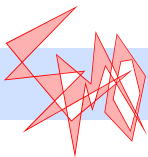
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

4. Olgu a , b , c positiivsed reaalarvud, mille korral $2a^2 + b^2 = 9c^2$. Tõesta võrratus

$$\frac{2c}{a} + \frac{c}{b} \geq \sqrt{3}.$$

5. Tõesta, et kui n ja k on positiivsed täisarvud, mille korral $1 < k < n - 1$, siis arv $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ jagub vähemalt kahe erineva algarvuga. (Kirjutis $x!$ tähistab korrutist $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot x$.)

6. Ruudustikus, milles on m rida ja n veergu, kusjuures $m \leq n$, värvitakse osa ruute mustaks nii, et iga kaks rida on värvitud erinevalt. Leia suurim selline täisarv k , et iga esialgse värvimise korral saab teatavad k veergu värvida üleni punaseks nii, et iga kaks rida jäävad ikka erinevalt värvituks.



Отборочный конкурс на ММО'11

20–21 апреля 2011 г.

Первый день

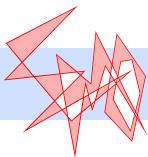
Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.

Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Две окружности находятся целиком снаружи друг друга. Пусть A — точка пересечения общих внутренних касательных данных окружностей, а K — проекция этой точки на общую внешнюю касательную. Касательные, проведённые из точки K , отличные от общей касательной, касаются окружностей в точках M_1 и M_2 . Доказать, что прямая AK делит угол M_1KM_2 пополам.
2. Пусть n — положительное целое число. Доказать, что при каждом делителе t числа $1 + 2 + \dots + n$, где $t \geq n$, можно множество $\{1, 2, \dots, n\}$ разбить на непересекающиеся подмножества так, чтобы сумма элементов каждого подмножества равнялась t .
3. Существует ли действие $*$ на множестве всех целых чисел, которое одновременно удовлетворяет следующим условиям:
 - (1) $(x * y) * z = x * (y * z)$ для произвольных целых числах x, y, z ;
 - (2) $x * x * y = y * x * x = y$ для произвольных целых числах x, y ?



Отборочный конкурс на ММО'11

20–21 апреля 2011 г.

Второй день

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.

Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.

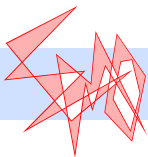
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. Пусть a , b , c — положительные действительные числа, при которых $2a^2 + b^2 = 9c^2$. Доказать неравенство

$$\frac{2c}{a} + \frac{c}{b} \geq \sqrt{3}.$$

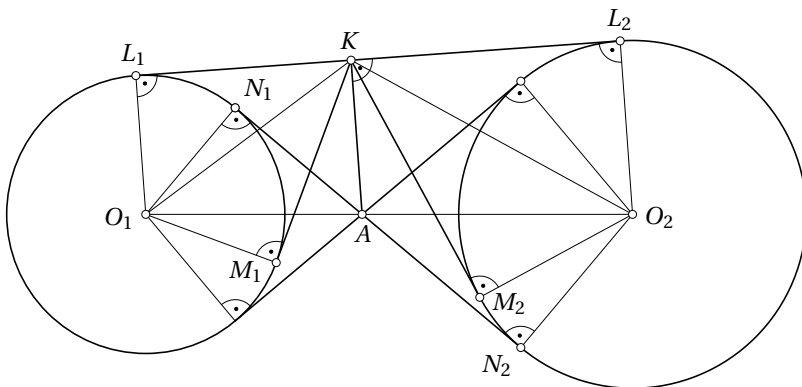
5. Доказать, что если n и k — положительные целые числа, при которых $1 < k < n - 1$, то число $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ делится по меньшей мере на два различных простых числа. (Запись $x!$ обозначает произведение $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot x$.)
6. В клетчатом поле с m рядами и n столбцами, причём $m \leq n$, часть клеток закрашена чёрным цветом так, что любые две строки закрашены по-разному. Найти такое наибольшее целое число k , что при любой начальной раскраске возможно некоторые k столбцов закрасить полностью красным цветом так, что раскраска любой пары строк оставалась бы по-прежнему различной.



Lahendused

1. *Lahendus 1.* Olgu L_1 ja L_2 ringjoonte välise ning N_1 ja N_2 sisemise ühispuutuja puutepunktid ringjoontega ning O_1 ja O_2 ringjoonte keskpunktid (joonis 1). Et sirged O_1L_1 , AK ja O_2L_2 on kõik risti sirgega L_1L_2 , siis on nad omavahel paralleelsed, mistõttu $\frac{|L_1K|}{|L_2K|} = \frac{|O_1A|}{|O_2A|}$. Kolmnurgad O_1AN_1 ja O_2AN_2 on sarnased, sest mõlemad on täisnurksed ja neil on ühised tippnurgad. Seepärast $\frac{|O_1A|}{|O_2A|} = \frac{|O_1N_1|}{|O_2N_2|} = \frac{|O_1L_1|}{|O_2L_2|}$. Järelikult on täisnurksed kolmnurgad O_1L_1K ja O_2L_2K sarnased võrdeliste kaatetite tõttu. Siit $\angle L_1KO_1 = \angle L_2KO_2$. Et $\angle L_1KM_1 = 2\angle L_1KO_1$ ja $\angle L_2KM_2 = 2\angle L_2KO_2$, siis ka $\angle L_1KM_1 = \angle L_2KM_2$. Arvestades, et $\angle L_1KA = \angle L_2KA = 90^\circ$ ja $\angle L_1KM_1 = \angle L_2KM_2$, saame $\angle M_1KA = \angle M_2KA$.

Lahendus 2. Punktist A paistavad mõlemad ringjooned sama nurga all. Ülesande lahendamiseks piisab tõestada, et mõlemad ringjooned paistavad sama nurga all ka punktist K . Olgu $O_1(a_1, b_1)$ ja $O_2(a_2, b_2)$ ringjoonte keskpunktide koordinaadid ning r_1 ja r_2 ringjoonte raadiused. Punktist $P(x, y)$ paistavad mõlemad ringjooned sama nurga all parajasti siis, kui $\frac{r_1}{|O_1P|} = \frac{r_2}{|O_2P|}$ ehk $\frac{r_1}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2}} = \frac{r_2}{\sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2}}$. Lihtsate algebraliste teisendustega näeme, et viimane võrrand on samaväärne



Joonis 1

võrrandiga $(r_1^2 - r_2^2)x^2 + (r_1^2 - r_2^2)y^2 + c_1x + c_2y + c_3 = 0$, kus c_1, c_2, c_3 on mingid konstandid. Kui $r_1 = r_2$, siis on ülesane väide ilmne. Kui $r_1 \neq r_2$, siis on tegu ringjoone võrrandiga. Sellel ringjoonel asub punkt A ja välise ühispuutujate lõikepunkt D ; sümmeetriakaalutlustel on AD selle ringjoone diameeter. Et AK on risti välise ühispuutujaga, siis asub sellel ringjoonel ka punkt K .

Märkus. Väide jääb kehtima, kui vahetada sisemised ja välimised ühispuutujad ning nurka M_1KM_2 vaadelda nurgana sirgete KM_1 ja KM_2 vahel.

2. Tõestame väite induktsiooniga n järgi. Kui $n = 1$, siis väide kehtib, sest arvu 1 ainus tegur on 1. Eeldame, et väide kehtib alati, kui $n < k$, ning vaatleme juhtu $n = k$. Olgu $s_k = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ ja $A_k = \{1, 2, \dots, k\}$. Fikseerime arvu s_k suvalise teguri m nii, et $m \geq k$.

Kui $m = k$, siis peab k olema paaritu, sest $\frac{s_k}{k} = \frac{k+1}{2}$ on täisarv. Seega võime moodustada tükelduse $\{1, k-1\}, \{2, k-2\}, \dots, \left\{\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}\right\}, \{k\}$, kus iga hulga elementide summa on k (ehk m).

Kui $m = k+1$, siis peab k olema paaris. Seega võime moodustada tükelduse $\{1, k\}, \{2, k-1\}, \dots, \left\{\frac{k}{2}, \frac{k}{2}+1\right\}$, kus iga hulga elementide summa on $k+1$ (ehk m).

Kui $k+1 < m < 2k$ ja m on paaritu, siis tükeldame kõigepealt hulga $\{m-k, m-k+1, \dots, k\}$ hulkadeks $\{m-k, k\}, \{m-k+1, k-1\}, \dots, \left\{\frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2}\right\}$, millest igaühe elementide summa on m . Järele jääb hulk $A_{m-k-1} = \{1, 2, \dots, m-k-1\}$. Et $m > m-k-1$ ja arv $s_{m-k-1} = \frac{(m-k-1)(m-k)}{2} = \frac{m(m-2k-1)}{2} + \frac{(k+1)k}{2}$ jagub m -ga, siis saame induktsiooni eelduse põhjal tükeldada hulga A_{m-k-1} alamhulkadeks nii, et iga alamhulga elementide summa on m .

Kui $k+1 < m < 2k$ ja m on paaris, siis eraldame kõigepealt hulgast $\{m-k, m-k+1, \dots, k\}$ alamhulgad $\{m-k, k\}, \{m-k+1, k-1\}, \dots, \left\{\frac{m}{2}-1, \frac{m}{2}+1\right\}$ elementide summaga m . Järele jäävad hulk $\left\{\frac{m}{2}\right\}$ ja hulk $A_{m-k-1} = \{1, 2, \dots, m-k-1\}$. Et võrratuse $m < 2k$ põhjal $\frac{m}{2} > m-k > m-k-1$ ning analoogiliselt eelmise punktiga s_{m-k-1} jagub $\frac{m}{2}$ -ga, siis saame induktsiooni eelduse põhjal tükeldada hulga A_{m-k-1} alamhulkadeks nii, et iga alamhulga elementide summa on $\frac{m}{2}$. Seejuures nende alamhulkade arv $\frac{s_{k-m-1}}{\frac{m}{2}} = m-2k-1 + 2 \cdot \frac{(k+1)k}{2m}$ on paaritu. Seega

koos hulgaga $\left\{\frac{m}{2}\right\}$ saame kõik järelejäänud hulgad kahekaupa kokku võtta hulkadeks, millest igatüüpi elementide summa on m .

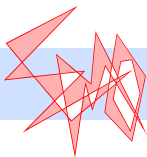
Kui $m \geq 2k$, siis olgu $d = \frac{s_k}{m}$. Tükeldame hulga $\{k - 2d + 1, \dots, k\}$ hulkadeks $\{k - 2d + 1, k\}, \dots, \{k - d, k - d + 1\}$, mida on d tükki. Järele jääb hulk $A_{k-2d} = \{1, 2, \dots, k - 2d\}$. Arv $\frac{s_{k-2d}}{d} = \frac{(k-2d)(k+1-2d)}{2d} = \frac{k(k+1)}{2d} - 2k - 1 + 2d$ on täisarv, samuti $\frac{s_{k-2d}}{d} \geq \frac{(k-2d) \cdot 2d}{2d} = k - 2d$, sest võrratusest $m \geq 2k$ järeldub $k + 1 \geq 4d$. Seega induktsiooni eelduse põhjal saame hulga A_{k-2d} tükeldada d alamhulgaks nii, et iga alamhulga elementide summa on võrdne. Ühendades hulkade $\{k - 2d + 1, \dots, k\}$ ja $A_{k-2d} = \{1, 2, \dots, k - 2d\}$ tükelduste tükid kahekaupa, saame hulga A_k tükelduse d alamhulgaks, kusjuures iga alamhulga elementide summa on m .

Märkus. Üldiselt ei vii sihile lähenemine, kus püütakse alamhulki moodustada järjest, valides neisse igal sammul kõigist kasutamata arvudest suurima, mille korral summa ei ületa arvu m . Vähim näide, mille korral see ebaõnnestub, on $n = 23$ ja $m = 46$. Siis kirjeldatud strateegia alusel tuleksid esimesed neli alamhulka $\{23, 22, 1\}$, $\{21, 20, 5\}$, $\{19, 18, 9\}$, $\{17, 16, 13\}$. Järgmise moodustamisel aga ei saa pärast suurimate kasutamata arvude 15, 14, 12 valimist enam juurde võtta 5, sest ta on juba kasutatud, ja vastavalt reeglile tuleb võtta 4. Siis aga osutub edasine täiendamine võimatuks, sest ka 1 on juba kasutatud.

3. *Vastus:* jah.

Defineerime mittenegatiivsete täisarvude hulgal tehte \oplus , mis seab kahele mittenegatiivsele täisarvule a ja b vastavusse mittenegatiivse täisarvu $a \oplus b$ nii, et iga $i = 0, 1, \dots$ korral $(a \oplus b)_i = (a_i + b_i) \bmod 2$, kus n_i tähistab arvu n kahendesituse järgule 2^i vastavat numbrit. See tehe rahuldab mittenegatiivsete täisarvude hulgal ülesande tingimust (1), sest mooduli järgi liitmine rahuldab seda tingimust, ning ka tingimust (2), sest kui $x, y \in \{0, 1\}$, siis $(x + x + y) \bmod 2 = y \bmod 2 = (y + x + x) \bmod 2$.

Et nii mittenegatiivsete täisarvude hulk kui ka kõigi täisarvude hulk on loenduvad, siis leidub nende hulkade vahel üksühene vastavus f (näiteks seades mittenegatiivsele täisarvule x vastavusse täisarvu $(-1)^x \lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor$). Iga täisarv esitub siis üheselt kujul $f(n)$, kus n on mittenegatiivne täisarv. Seetõttu saame tehte $*$ defineerida valemiga $f(x) * f(y) = f(x \oplus y)$. Konstruktsiooni põhjal jäävad tingimused (1) ja (2) kehtima.

**Lahendused**

4. *Lahendus 1.* Kasutades aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$, saame

$$\begin{aligned}\frac{2c}{a} + \frac{c}{b} &= \frac{(2b+a)c}{ab} = \frac{(2b+a)\sqrt{2a^2+b^2}}{3ab} = \frac{(b+b+a)\sqrt{a^2+a^2+b^2}}{3ab} \geq \\ &\geq \frac{3\sqrt[3]{b^2a}\sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^2}}}{3ab} = \frac{3\sqrt{3}\sqrt[3]{b^2a \cdot a^2b}}{3ab} = \frac{3\sqrt{3}ab}{3ab} = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Lahendus 2. Harmoonilise ja ruutkeskmise vaheline võrratus arvude a , a , b jaoks annab

$$\frac{3}{\frac{2}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{\frac{a^2 + a^2 + b^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2 + b^2}{3}} = \sqrt{\frac{9c^2}{3}} = \sqrt{3}c.$$

Seega

$$\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot c \geq \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

millest järeldub ka ülesande võrratus.

Lahendus 3. Kasutades võrratust $a^2 + b^2 \geq 2ab$, saame

$$\begin{aligned}\left(\frac{2c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2 &= \frac{(2b+a)^2c^2}{a^2b^2} = \frac{(2b+a)^2(2a^2+b^2)}{9a^2b^2} = \\ &= \frac{((a^2+b^2) + 4ab + 3b^2)(a^2 + (a^2+b^2))}{9a^2b^2} \geq \frac{(6ab + 3b^2)(a^2 + 2ab)}{9a^2b^2} = \\ &= \frac{(2a+b)(a+2b)}{3ab} = \frac{2a^2 + 5ab + 2b^2}{3ab} \geq \frac{4ab + 5ab}{3ab} = 3.\end{aligned}$$

Lahendus 4. Võrratuse vasaku poole ruut avaldub kujul

$$\left(\frac{2c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2 = \frac{(2b+a)^2(2a^2+b^2)}{9a^2b^2} = \frac{1}{9} \left(2 + \frac{a}{b}\right)^2 \left(2 + \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Tähistades $\frac{a}{b} = x$, tuleb meil tõestada võrratus $\frac{1}{9}(2+x)^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) \geq 3$ ehk $(2+x)^2(2x^2+1) \geq 27x^2$. Avame sulud ja viime liikmed ühele poole, tekib eelmisega samaväärne võrratus $2x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 4x + 4 \geq 0$, mis pärast vasaku poole teguriteks lahutamist omandab kuju $2(x-1)^2(x^2+6x+2) \geq 0$. See võrratus kehtib, sest ruutpolünoomi x^2+6x+2 väärtus on positiivsete reaalarvude korral positiivne.

Lahendus 5. Leiame eelmises lahenduses tekkinud võrratuse vasaku poole avaldise $y = \frac{1}{9}(2+x)^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)$ miinimumkoha. Et

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2}{9}(2+x) \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{9}(2+x)^2 \frac{1}{x^3} = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{(2+x)(2x^3+x-2-x)}{x^3} = \frac{4(x+2)(x-1)(x^2+x+1)}{9x^3}, \end{aligned}$$

siis tuletise ainus positiivne nullkoht on $x = 1$. Seejuures on tegemist just miinimumkohaga, sest vaadeldava avaldise väärtus kasvab nii x -i kahane-misel 0-ni kui ka x -i tõkestamatul kasvamisel. Kohal $x = 1$ omandab aval-dis seega minimaalse väärtuse $y = 3$.

Lahendus 6. Tähistame $\frac{a}{c} = x$ ja $\frac{b}{c} = y$. Siis avaldub võrratuse vasak pool kujul $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$, kusjuures $2x^2 + y^2 = 9$. Avaldades siit y -i, võime ülesande taandada funktsiooni $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{9-2x^2}}$ miinimumi leidmisele. Funktsiooni tuletis on

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2}(9-2x^2)^{-\frac{3}{2}}(-4x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2x}{(9-2x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Tingimusest $f'(x) = 0$ saame võrrandi $\frac{2}{x^2} = \frac{2x}{(9-2x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ehk $x^3 = (9-2x^2)^{\frac{3}{2}}$ ehk $x = \sqrt{9-2x^2}$. Siit $x^2 = 9-2x^2$ ehk $3x^2 = 9$, millest $x = \sqrt{3}$. See on tõesti miinimumkoht, sest kui x läheneb 0-le või $\frac{3}{\sqrt{2}}$ -le, siis $f(x)$ kasvab piiramatult. Vaadeldava funktsiooni minimaalne väärtus on seega $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

Lahendus 7. Antud võrdus $2a^2 + b^2 = 9c^2$ on samaväärne võrdusega

$$\left(\frac{\sqrt{2}a}{3c}\right)^2 + \left(\frac{b}{3c}\right)^2 = 1.$$

Toome sisse uue muutuja x , mille korral $\sin x = \frac{\sqrt{2}a}{3c}$ ja $\cos x = \frac{b}{3c}$. Et a , b ja c on positiivsed, siis võime eeldada, et $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Siis omandab tõestatav võrratus kuju

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos x} \geq \sqrt{3}.$$

Tähistades $f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos x}$, saame

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^3 x - 2\sqrt{2} \cos^3 x}{3 \sin^2 x \cos^2 x}.$$

Nüüd $f'(x) = 0 \iff \sin^3 x - 2\sqrt{2} \cos^3 x = 0 \iff \sin^3 x = 2\sqrt{2} \cos^3 x \iff \tan^3 x = 2\sqrt{2} \iff \tan x = \sqrt{2}$. Seega $f'(x) = 0$ parajasti ühe argumenti väärtuse x_0 korral. Trigonomeetriavalemite põhjal $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\tan^2 x}$ ja $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, seega $\frac{1}{\sin x_0} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ja $\frac{1}{\cos x_0} = \sqrt{3}$. Siit

$$f(x_0) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

Võrratuse kehtimine on näidatud, kui tõestada, et ekstreemumkoht x_0 on miinimumkoht. Selleks võtame väärtused $x_1 = \frac{\pi}{4} < x_0$ ja $x_2 = \frac{\pi}{3} > x_0$ ning veendume, et $f(x_1) > \sqrt{3}$ ja $f(x_2) > \sqrt{3}$.

5. *Lahendus 1.* Üldisust kitsendamata eeldame, et $n \geq 2k$ (kui $n < 2k$, siis vahetame k ja $n - k$ rollid). Olgu p suvaline algarv. Vaatleme arve, mis jäävad järele avaldise

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1}$$

lugejas olevatest teguritest, kui nad kõik taandada suurima p astmega, millega nad vastavalt jaguvad. Oletame, et mingid kaks neist k jagatisest on võrdsed. Siis vastavad esialgsed arvud esituvad kujul $s \cdot p^i$ ja $s \cdot p^j$, kus $i > j$. Siis aga saame

$$n \geq s \cdot p^i \geq p \cdot s \cdot p^j > p \cdot (n-k) \geq 2 \cdot (n-k),$$

mis on vastuolus eeldusega $n \geq 2k$. Järelikult on saadud k jagatist paari-kaupa erinevad.

Et $1 < k < n - 1$, siis esineb lugejas vähemalt kaks järjestikust naturaalarvu, millest vähemalt üks ei jagu p -ga. See arv p astmetega jagamisel ei muutu ja eelduse $n \geq 2k$ tõttu on ta k -st suurem. Järelikult pärast p astmetega läbijagamist jääb lugejasse k erineva teguri korrutis, mis on suurem kui nimetaja $k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot 1$. Seega ei saa lugejas sisalduvad p -st erinevad algtegurid nimetajaga taandamisel täiesti välja taanduda. Järelikult ei saa $\binom{n}{k}$ algteguriteks lahutus koosneda vaid p astmest.

Lahendus 2. Oletame, et mingite n ja k korral

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}{k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot 1} = p^t,$$

kus p on algarv ja t mingi positiivne täisarv. Olgu m selline arv hulgast $\{n, n - 1, \dots, n - k + 1\}$, mille algteguriteks lahutuses on algteguri p astendaja suurim. Siis arvude $n, n - 1, \dots, m + 1$ algteguriteks lahutuses on p astendaja sama mis vastavalt arvude $n - m, n - m - 1, \dots, 1$ algteguriteks lahutuses ning arvude $m - 1, \dots, n - k + 1$ algteguriteks lahutuses sama mis vastavalt arvude $1, \dots, m - 1 - n + k$ algteguriteks lahutuses. Järelikult on arvu p astendaja korrutise $n(n - 1) \dots (m + 1)(m - 1) \dots (n - k + 1)$ algteguriteks lahutuses sama mis arvu $(n - m)!(m - 1 - n + k)!$ algteguriteks lahutuses. Et

$$\frac{k!}{(n - m)!(m - 1 - n + k)!} = k \cdot \frac{(k - 1)!}{(n - m)!(k - 1 - n + m)!} = k \cdot \binom{k - 1}{n - m}$$

on täisarv, siis on p astendaja arvu $(n - m)!(m - 1 - n + k)!$ algteguriteks lahutuses ülimalt nii suur kui arvu $k!$ algteguriteks lahutuses. Järelikult on algarvu p astendaja arvu $\binom{n}{k}$ algteguriteks lahutuses ülimalt nii suur kui arvu m algteguriteks lahutuses. See on aga vastuolu, sest antud eeldustel $\binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} > n \geq m$.

Lahendus 3. Tähistagu $p \triangleright x$ algarvu p astendajat positiivse täisarvu x algteguriteks lahutuses. Legendre'i valemi põhjal

$$p \triangleright m! = \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor,$$

kus i on suurim selline täisarv, et $p^i \leq m$. Siis

$$p \triangleright \frac{n!}{k!(n - k)!} = p \triangleright n! - p \triangleright k! - p \triangleright (n - k)! =$$

$$= \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^2} \right\rfloor \right) + \dots \\ \dots + \left(\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor \right),$$

kus i on suurim selline täisarv, et $p^i \leq n$.

Et $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, siis $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$. Järelikult $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ või $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$. Iga j korral niisiis

$$\left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{p^j} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-k}{p^j} \right\rfloor \quad \text{või} \quad \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{p^j} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-k}{p^j} \right\rfloor + 1,$$

seega $p \triangleright \frac{n!}{k!(n-k)!}$ lahtikirjutises on iga omaette sulgudes oleva liidetava väärtus 0 või 1. Kokkuvõttes

$$p \triangleright \frac{n!}{k!(n-k)!} \leq i,$$

mistõttu p aste arvu $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ algteguriteks lahutuses on ülimalt n .

Et vastavalt eeldusele $1 < k < n - 1$, siis $\binom{n}{k} > n$, mistõttu arvu $\binom{n}{k}$ algteguriteks lahutus peab sisaldama mitme algarvu astmeid.

Lahendus 4. Kasutame Kummeri teoreemi, mille kohaselt $p \triangleright \binom{n}{k}$ võrdub arvude k ja $n - k$ liitmisel p -ndsüsteemis toimuvate ülekannete arvuga. Ülekannete arv liitmisel on ülimalt $a - 1$, kus a on summa numbrite arv. Numbrite arv aga on $i + 1$, kus i on suurim täisarv, mille korral $p^i \leq n$. Kokkuvõttes

$$p \triangleright \binom{n}{k} \leq i,$$

mistõttu p aste arvu $\binom{n}{k}$ algteguriteks lahutuses on ülimalt n . Et $\binom{n}{k} > n$, siis peab $\binom{n}{k}$ jaguma veel mingi algarvuga.

Märkus Lahendustest 2, 3, ja 4 järeldub muu hulgas, et algarvu aste biinoomkordaja $\binom{n}{k}$ algteguriteks lahutuses on ülimalt n .

6. *Vastus:* $n - m + 1$.

Lahendus 1. Tõestame, et kui $m \leq n$, siis saab alati ühe veeru punaseks värvida. Siis jättes selle veeru vaatluse alt välja, saame protsessi jätkata kuni hetkeni, mil veergude arv on muutunud ridade arvust väiksemaks, st $n - m + 1$ korda.

Oletame väitevastaselt, et ühtegi veergu ei saa punaseks värvida nii, et sarnaseid ridu ei teki. Siis leidub iga veeru korral vähemalt kaks rida, mis erinevad ainult ühe ruudu poolest selles veerus. Valime iga veeru korral sellised kaks rida välja. Vaatleme graafi, mille tippudeks on read ja servadeks väljalititud ridade paarid. Et saadud graafil on servi vähemalt niisama palju kui tippe, leidub graafis tsüklid. Vaatleme sellel tsüklil mingit rida (st tippu) x . Siis talle tsüklil järgnev rida erineb reast x täpselt ühe ruudu poolest, asugu see ruut veerus y . Iga järgnev rida erineb eelmisest täpselt ühes veerus. Et need veerud erinevad kõik veerust y , siis vastavad kõik ülejäänud servad sellel tsüklil sellistele üleminekutele ühest reast teise, kus veeru y ruut jääb samaks. Seega jääb veeru y ruut samaks kõigis reale x järgnevates ridades ning peaks jääma samaks ka viimasel üleminekul, mis viib tagasi ritta x . Seega peaks rea x ruut olema sama värvi nagu reale x järgneva rea ruut, vastuolu.

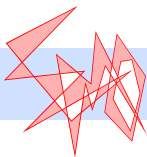
Rohkem ridu üldiselt punaseks värvida ei saa. Olgu esialgu mustaks värvitud kõik ruudud, välja arvatud üks $m \times m$ -alamruudustiku diagonaal. Kui värvime punaseks $n - m + 2$ veergu, satuvad vähemalt 2 veergu alati sellesse alamruudustikku. Nii aga värvime üle kahes reas ainsad valged ruudud, mistõttu järele jääb kaks ühtemoodi värvitud rida.

Lahendus 2. (Jaan Toots) Hakkame tabelit veergude kaupa läbi vaatama. Esimene veerg jagab kõigi ridade hulga kaheks osahulgaks: ühes neist on read, mille 1. veerus on valge ruut, teises read, mille 1. veerus on must ruut. Kui esimeses veerus on kõik ruudud valged või kõik ruudud mustad, siis võib selle veeru punaseks värvida. Iga järgmise veeru korral tükeldame eelmisel sammul saadud osahulgad omakorda vastavalt sellele, kas nendes ridades on selles veerus must või valge ruut. Kui sellel sammul ühtegi osahulka ei tükeldata, siis värvime selle veeru punaseks. Kokkuvõttes iga veeru korral kas osahulkade arv suureneb vähemalt ühe võrra või see veerg värvitakse punaseks. Et alguses oli meil üks hulk ja lõpus on meil m ühest reast koosnevat osahulka, siis on punaseks värvimata veergude arv maksimaalselt $m - 1$, seega punaseks värvitud veergude arv on vähemalt $k = n - m + 1$. Kõik read on endiselt jäänud erinevaks, sest me värvime üle ainult need veerud, milles pole uut informatsiooni ridade erinevuse kohta võrreldes eelnevate veergudega.

Seda, et leidub värvimine, mille korral rohkem veerge punaseks värvida ei saa, saab näidata nagu esimeses lahenduses.

Lahendus 3. (Aleksandr Šved) Näitame matemaatilise induktsiooni abil ridade arvu järgi, et alati saab vähemalt $k = n - m + 1$ veergu punaseks värvida. Kui $m = 1$, siis võib ilmselt kõik veerud punaseks värvida, st $k = n = n - m + 1$. Oletame nüüd, et kui $m = l$, siis saab punaseks värvida vähemalt $n - l + 1$ veergu nii, et kõik read jäävad erinevaks. Vaatleme juhtu $m = l + 1$. Induktsiooni eelduse tõttu saame punaseks värvida vähemalt $n - l + 1$ veergu nii, et esimesed l rida jäävad erinevaks. Kui pärast seda värvimist ka viimane rida on kõigist teistest erinev, siis on meil tingimused täidetud ning saime punaseks värvida vähemalt $n - m + 2$ veergu. Kui viimane rida on mõne eelnevaga samasugune (selliseid ridu saab olla ainult üks), siis, kuna read olid alguses kõik erinevad, leidub veerg, kus viimane rida ja temaga pärast värvimist sarnane rida erinevad. Kui see veerg jätta värvimata, siis on kõik read erinevad ning saame punaseks värvida $n - m + 1$ veergu.

Seda, et leidub värvimine, mille korral rohkem veerge punaseks värvida ei saa, saab näidata nagu esimeses lahenduses.



Hindamisskeemid

1. (*Rauno Siinmaa*) Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Jõutud võrduseni $\frac{|O_1A|}{|O_2A|} = \frac{|O_1L_1|}{|O_2L_2|}$ või kolmnurkade O_1AN_1 ja O_2AN_2 sarnasuseni: 2 p
- Jõutud võrduseni $\frac{|O_1A|}{|O_2A|} = \frac{|L_1K|}{|L_2K|}$: 2 p
- Võrdusest $\frac{|L_1K|}{|L_2K|} = \frac{|O_1L_1|}{|O_2L_2|}$ on jõutud täislahenduseni: 3 p

2. (*Oleg Košik*) Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Korrektselt analüüsitud juhud $m = n$ ja $m = n + 1$: 1 p
- Lisaks esitatud edasiviiv idee juhu $m \leq 2n$ jaoks: 2 p

Ülesanne osutus üle ootuste keeruliseks ning toimivaid konstruktsioone üldjuhtude jaoks kahjuks ei esinenud. Ainult kahes töös leidis sõna „induktsioon“, kuid ainult selle sõna eest punkte ei saanud.

3. (*Härmel Nestra*) Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Vale vastus, kasutatud teisendused: 0 p
- Õige vastus, mittetöötav konstruktsioon: 0 p

Ükski võistleja punkte ei saanud. Õiget vastust pakuti 3 töös, kuid üheski ei vastanud konstruktsioon ülesande tingimustele. Takistuseks ülesande lahendamisel oli ilmselt harjumatus seda tüüpi ülesandega või isegi ülesande vääritimõistmine.



Hindamisskeemid

4. (*Kairi Kangro*) Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.
- Täislahendus: 7 p
 - Teisendatud võrratus kujule $a^4 + 4a^3b - 9a^2b^2 + 2ab^3 + 2b^4 \geq 0$: 1 p
- Punkte võeti maha arvutusvigade ja ebapiisavate põhjenduste eest.

5. (*Juhan Aru*) Ainsa täislahenduse eest anti heldelt 7 punkti. Algtegurite astmete uurimise ja etteantud tingimustel võrratuse $\binom{n}{k} > n$ tõestamise eest saadi maksimaalselt 1 lohutuspunkt.

Kuigi binoomkordaja täisarvulisust oleks võinud ka lihtsalt eeldada, üritati korduvalt seda tõestada ja kahjuks pisut ebaõnnestunult: seda taheti järeldada faktist, et $m \leq k$ korral leidub k järjestikuse arvu hulgas arv, mis jagub m -ga. See fakt kehtib tõepoolest, ent kuna $k!$ tegurid ei ole omavahel ühistegurita, ei tähenda see koheselt, et iga k järjestikuse arvu korrutis jaguks $k!$ -ga. Selle väite võib siiski raskusteta tõestada kasutades binoomkordajate kombinatoorset tõlgendust, induktsiooni või uurides, nagu ülendasid 5 lahendustes, arvude algtegureid.

6. (*Urve Kangro*) Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
- Näidatud, et mingi värvimise korral ei saa rohkem kui $k = n - m + 1$ veergu punaseks värvida: 2 p
 - Näidatud, et iga värvimise korral saab vähemalt $k = n - m + 1$ veergu punaseks värvida: 5 p

Paljud õpilased olid püüdnud vaadelda „halvimat juhtu“, aga see pole kuidagi põhjendatud, et halvim juht on just see, kui read erinevad üksteisest vaid ühe ruudu võrra. Žürii lahenduses toodud näites erinesid kõik read üksteisest täpselt kahe ruudu võrra ning see annab samuti minimaalse arvu veerge, mida võib punaseks värvida. Mõned lahendused said lisaks punkti kasulike tähelepanekute eest, ning mõned lahendused, kus oli värvimise näide küll olemas, kaotasid punkti mittetäieliku seletuse eest. Lahendused, kus oli näidatud, et soodsa värvimise korral võib kustutada kuni $n - \lceil \log_2 m \rceil$ veergu, punkte ei saanud.