Отборочный конкурс на ММО'11

20–21 апреля 2011 г. **Первый день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Две окружности находятся целиком снаружи друг друга. Пусть A — точка пересечения общих внутренних касательных данных окружностей, а K — проекция этой точки на общую внешнюю касательную. Касательные, проведённые из точки K, отличные от общей касательной, касаются окружностей в точках M_1 и M_2. Доказать, что прямая AK делит угол M_1KM_2 пополам.

2. Пусть n — положительное целое число. Доказать, что при каждом делителе m числа $1 + 2 + \ldots + n$, где $m \geqslant n$, можно множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ разбить на непересекающиеся подмножества так, чтобы сумма элементов каждого подмножества равнялась m.

3. Существует ли действие $*$ на множестве всех целых чисел, которое одновременно удовлетворяет следующим условиям:

(1) $(x * y) * z = x * (y * z)$ для произвольных целых числах x, y, z;

(2) $x * x * y = y * x * x = y$ для произвольных целых числах x, y?

Отборочный конкурс на ММО'11

20–21 апреля 2011 г. **Второй день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. Пусть a, b, c — положительные действительные числа, при которых $2a^2 + b^2 = 9c^2$. Доказать неравенство

$$\frac{2c}{a} + \frac{c}{b} \geqslant \sqrt{3}.$$

5. Доказать, что если n и k — положительные целые числа, при которых $1 < k < n-1$, то число $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ делится по меньшей мере на два различных простых числа. (Запись $x!$ обозначает произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot x$.)

6. В клетчатом поле с m рядами и n столбцами, причём $m \leqslant n$, часть клеток закрашена чёрным цветом так, что любые две строки закрашены по-разному. Найти такое наибольшее целое число k, что при любой начальной раскраске возможно некоторые k столбцов закрасить полностью красным цветом так, что раскраска любой пары строк оставалась бы по-прежнему различной.