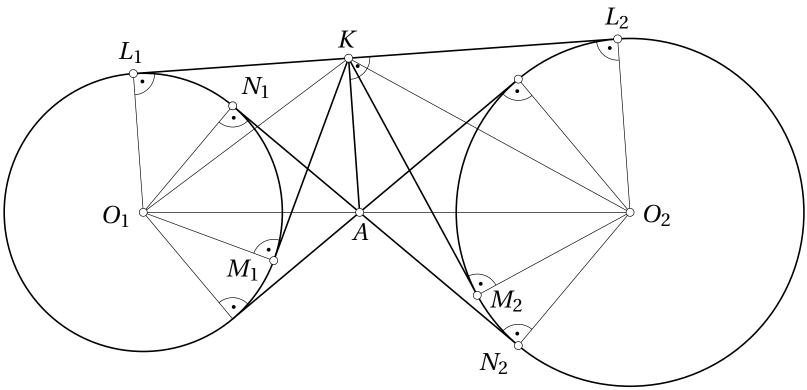
## Lahendused

1. *Lahendus 1.* Olgu $L_1$ ja $L_2$ ringjoonte välise ning $N_1$ ja $N_2$ sisemise ühis-puutuja puutepunktid ringjoontega ning $O_1$ ja $O_2$ ringjoonte keskpunktid (joonis 1). Et sirged $O_1L_1$, $AK$ ja $O_2L_2$ on kõik risti sirgega $L_1L_2$, siis on nad omavahel paralleelsed, mistõttu $\frac{|L_1K|}{|L_2K|} = \frac{|O_1A|}{|O_2A|}$. Kolmnurgad $O_1AN_1$ ja $O_2AN_2$ on sarnased, sest mõlemad on täisnurksed ja neil on ühised tippnurgad. Seepärast $\frac{|O_1A|}{|O_2A|} = \frac{|O_1N_1|}{|O_2N_2|} = \frac{|O_1L_1|}{|O_2L_2|}$. Järelikult on täisnurksed kolmnurgad $O_1L_1K$ ja $O_2L_2K$ sarnased võrdeliste kaatetite tõttu. Siit $\angle L_1KO_1 = \angle L_2KO_2$. Et $\angle L_1KM_1 = 2\angle L_1KO_1$ ja $\angle L_2KM_2 = 2\angle L_2KO_2$, siis ka $\angle L_1KM_1 = \angle L_2KM_2$. Arvestades, et $\angle L_1KA = \angle L_2KA = 90^\circ$ ja $\angle L_1KM_1 = \angle L_2KM_2$, saame $\angle M_1KA = \angle M_2KA$.

   *Lahendus 2.* Punktist $A$ paistavad mõlemad ringjooned sama nurga all. Ülesande lahendamiseks piisab tõestada, et mõlemad ringjooned paistavad sama nurga all ka punktist $K$. Olgu $O_1(a_1, b_1)$ ja $O_2(a_2, b_2)$ ringjoonte keskpunktide koordinaadid ning $r_1$ ja $r_2$ ringjoonte raadiused. Punktist $P(x, y)$ paistavad mõlemad ringjooned sama nurga all parajasti siis, kui $\frac{r_1}{|O_1P|} = \frac{r_2}{|O_2P|}$ ehk $\frac{r_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}} = \frac{r_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}$. Lihtsate algebraliste teisendustega näeme, et viimane võrrand on samaväärne




Joonis 1

võrrandiga $(r_1^2 - r_2^2)x^2 + (r_1^2 - r_2^2)y^2 + c_1x + c_2y + c_3 = 0$, kus $c_1$, $c_2$, $c_3$ on mingid konstandid. Kui $r_1 = r_2$, siis on ülesane väide ilmne. Kui $r_1 \neq r_2$, siis on tegu ringjoone võrrandiga. Sellel ringjoonel asub punkt $A$ ja väliste ühispuutujate lõikepunkt $D$; sümmeetriakaalutlustel on $AD$ selle ringjoone diameeter. Et $AK$ on risti välise ühispuutujaga, siis asub sellel ringjoonel ka punkt $K$.

*Märkus.* Väide jääb kehtima, kui vahetada sisemised ja välimised ühispuutujad ning nurka $M_1KM_2$ vaadelda nurgana sirgete $KM_1$ ja $KM_2$ vahel.

2. Tõestame väite induktsiooniga $n$ järgi. Kui $n = 1$, siis väide kehtib, sest arvu 1 ainus tegur on 1. Eeldame, et väide kehtib alati, kui $n < k$, ning vaatleme juhtu $n = k$. Olgu $s_k = 1 + 2 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ ja $A_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. Fikseerime arvu $s_k$ suvalise teguri $m$ nii, et $m \geqslant k$.

Kui $m = k$, siis peab $k$ olema paaritu, sest $\dfrac{s_k}{k} = \dfrac{k+1}{2}$ on täisarv. Seega võime moodustada tükelduse $\{1, k-1\}$, $\{2, k-2\}$, $\ldots$, $\left\{\dfrac{k-1}{2}, \dfrac{k+1}{2}\right\}$, $\{k\}$, kus iga hulga elementide summa on $k$ (ehk $m$).

Kui $m = k + 1$, siis peab $k$ olema paaris. Seega võime moodustada tükelduse $\{1, k\}$, $\{2, k-1\}$, $\ldots$, $\left\{\dfrac{k}{2}, \dfrac{k}{2} + 1\right\}$, kus iga hulga elementide summa on $k + 1$ (ehk $m$).

Kui $k + 1 < m < 2k$ ja $m$ on paaritu, siis tükeldame kõigepealt hulga $\{m-k, m-k+1, \ldots, k\}$ hulkadeks $\{m-k, k\}$, $\{m-k+1, k-1\}$, $\ldots$, $\left\{\dfrac{m-1}{2}, \dfrac{m+1}{2}\right\}$, millest igaühe elementide summa on $m$. Järele jääb hulk $A_{m-k-1} = \{1, 2, \ldots, m-k-1\}$. Et $m > m-k-1$ ja arv $s_{m-k-1} = \dfrac{(m-k-1)(m-k)}{2} = \dfrac{m(m-2k-1)}{2} + \dfrac{(k+1)k}{2}$ jagub $m$-ga, siis saame induktsiooni eelduse põhjal tükeldada hulga $A_{m-k-1}$ alamhulkadeks nii, et iga alamhulga elementide summa on $m$.

Kui $k + 1 < m < 2k$ ja $m$ on paaris, siis eraldame kõigepealt hulgast $\{m-k, m-k+1, \ldots, k\}$ alamhulgad $\{m-k, k\}$, $\{m-k+1, k-1\}$, $\ldots$, $\left\{\dfrac{m}{2} - 1, \dfrac{m}{2} + 1\right\}$ elementide summaga $m$. Järele jäävad hulk $\left\{\dfrac{m}{2}\right\}$ ja hulk $A_{m-k-1} = \{1, 2, \ldots, m-k-1\}$. Et võrratuse $m < 2k$ põhjal $\dfrac{m}{2} > m - k > m - k - 1$ ning analoogiliselt eelmise punktiga $s_{m-k-1}$ jagub $\dfrac{m}{2}$-ga, siis saame induktsiooni eelduse põhjal tükeldada hulga $A_{m-k-1}$ alamhulkadeks nii, et iga alamhulga elementide summa on $\dfrac{m}{2}$. Seejuures nende alamhulkade arv $\dfrac{s_{k-m-1}}{\frac{m}{2}} = m - 2k - 1 + 2 \cdot \dfrac{(k+1)k}{2m}$ on paaritu. Seega koos hulgaga $\left\{\frac{m}{2}\right\}$ saame kõik järelejäänud hulgad kahekaupa kokku võtta hulkadeks, millest igaühe elementide summa on $m$.

Kui $m \geqslant 2k$, siis olgu $d = \frac{s_k}{m}$. Tükeldame hulga $\{k-2d+1, \ldots, k\}$ hulkadeks $\{k-2d+1, k\}$, $\ldots$, $\{k-d, k-d+1\}$, mida on $d$ tükki. Järele jääb hulk $A_{k-2d} = \{1, 2, \ldots, k-2d\}$. Arv $\frac{s_{k-2d}}{d} = \frac{(k-2d)(k+1-2d)}{2d} = \frac{k(k+1)}{2d} - 2k - 1 + 2d$ on täisarv, samuti $\frac{s_{k-2d}}{d} \geqslant \frac{(k-2d) \cdot 2d}{2d} = k-2d$, sest võrratusest $m \geqslant 2k$ järeldub $k+1 \geqslant 4d$. Seega induktsiooni eelduse põhjal saame hulga $A_{k-2d}$ tükeldada $d$ alamhulgaks nii, et iga alamhulga elementide summa on võrdne. Ühendades hulkade $\{k-2d+1, \ldots, k\}$ ja $A_{k-2d} = \{1, 2, \ldots, k-2d\}$ tükelduste tükid kahekaupa, saame hulga $A_k$ tükelduse $d$ alamhulgaks, kusjuures iga alamhulga elementide summa on $m$.

*Märkus.* Üldiselt ei vii sihile lähenemine, kus püütakse alamhulki moodustada järjest, valides neisse igal sammul kõigist kasutamata arvudest suurima, mille korral summa ei ületa arvu $m$. Vähim näide, mille korral see ebaõnnestub, on $n = 23$ ja $m = 46$. Siis kirjeldatud strateegia alusel tuleksid esimesed neli alamhulka $\{23, 22, 1\}$, $\{21, 20, 5\}$, $\{19, 18, 9\}$, $\{17, 16, 13\}$. Järgmise moodustamisel aga ei saa pärast suurimate kasutamata arvude $15$, $14$, $12$ valimist enam juurde võtta $5$, sest ta on juba kasutatud, ja vastavalt reeglile tuleb võtta $4$. Siis aga osutub edasine täiendamine võimatuks, sest ka $1$ on juba kasutatud.

**3.** *Vastus:* jah.

Defineerime mittenegatiivsete täisarvude hulgal tehte $\oplus$, mis seab kahele mittenegatiivsele täisarvule $a$ ja $b$ vastavusse mittenegatiivse täisarvu $a \oplus b$ nii, et iga $i = 0, 1, \ldots$ korral $(a \oplus b)_i = (a_i + b_i) \bmod 2$, kus $n_i$ tähistab arvu $n$ kahendesituse järgule $2^i$ vastavat numbrit. See tehe rahuldab mittenegatiivsete täisarvude hulgal ülesande tingimust (1), sest mooduli järgi liitmine rahuldab seda tingimust, ning ka tingimust (2), sest kui $x, y \in \{0, 1\}$, siis $(x + x + y) \bmod 2 = y \bmod 2 = (y + x + x) \bmod 2$.

Et nii mittenegatiivsete täisarvude hulk kui ka kõigi täisarvude hulk on loenduvad, siis leidub nende hulkade vahel üksühene vastavus $f$ (näiteks seades mittenegatiivsele täisarvule $x$ vastavusse täisarvu $(-1)^x \lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor$). Iga täisarv esitub siis üheselt kujul $f(n)$, kus $n$ on mittenegatiivne täisarv. Seetõttu saame tehte $*$ defineerida valemiga $f(x) * f(y) = f(x \oplus y)$. Konstruktsiooni põhjal jäävad tingimused (1) ja (2) kehtima.

# Lahendused

**4.** *Lahendus 1.* Kasutades aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust $x+y+z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$, saame

$$\frac{2c}{a}+\frac{c}{b}=\frac{(2b+a)c}{ab}=\frac{(2b+a)\sqrt{2a^2+b^2}}{3ab}=\frac{(b+b+a)\sqrt{a^2+a^2+b^2}}{3ab}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{3\sqrt[3]{b^2a}\sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^2}}}{3ab}=\frac{3\sqrt{3}\sqrt[3]{b^2a\cdot a^2b}}{3ab}=\frac{3\sqrt{3}ab}{3ab}=\sqrt{3}.$$

*Lahendus 2.* Harmoonilise ja ruutkeskmise vaheline võrratus arvude $a$, $a$, $b$ jaoks annab

$$\frac{3}{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+a^2+b^2}{3}}=\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{3}}=\sqrt{\frac{9c^2}{3}}=\sqrt{3}c.$$

Seega

$$\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot c\geqslant\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

millest järeldub ka ülesande võrratus.

*Lahendus 3.* Kasutades võrratust $a^2+b^2\geqslant 2ab$, saame

$$\left(\frac{2c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2=\frac{(2b+a)^2c^2}{a^2b^2}=\frac{(2b+a)^2(2a^2+b^2)}{9a^2b^2}=$$
$$=\frac{\big((a^2+b^2)+4ab+3b^2\big)\big(a^2+(a^2+b^2)\big)}{9a^2b^2}\geqslant\frac{(6ab+3b^2)(a^2+2ab)}{9a^2b^2}=$$
$$=\frac{(2a+b)(a+2b)}{3ab}=\frac{2a^2+5ab+2b^2}{3ab}\geqslant\frac{4ab+5ab}{3ab}=3.$$

*Lahendus 4.* Võrratuse vasaku poole ruut avaldub kujul

$$\left(\frac{2c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2=\frac{(2b+a)^2(2a^2+b^2)}{9a^2b^2}=\frac{1}{9}\left(2+\frac{a}{b}\right)^2\left(2+\frac{b^2}{a^2}\right).$$

Tähistades $\frac{a}{b} = x$, tuleb meil tõestada võrratus $\frac{1}{9}(2+x)^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right) \geqslant 3$ ehk $(2+x)^2(2x^2+1) \geqslant 27x^2$. Avame sulud ja viime liikmed ühele poole, tekib eelmisega samaväärne võrratus $2x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 4x + 4 \geqslant 0$, mis pärast vasaku poole teguriteks lahutamist omandab kuju $2(x-1)^2(x^2+6x+2) \geqslant 0$. See võrratus kehtib, sest ruutpolünoomi $x^2 + 6x + 2$ väärtus on positiivsete reaalarvude korral positiivne.

*Lahendus 5.* Leiame eelmises lahenduses tekkinud võrratuse vasaku poole avaldise $y = \frac{1}{9}(2+x)^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)$. miinimumkoha. Et

$$y' = \frac{2}{9}(2+x)\left(2+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{9}(2+x)^2\frac{1}{x^3} = $$
$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{(2+x)(2x^3+x-2-x)}{x^3} = \frac{4(x+2)(x-1)(x^2+x+1)}{9x^3},$$

siis tuletise ainus positiivne nullkoht on $x = 1$. Seejuures on tegemist just miinimumkohaga, sest vaadeldava avaldise väärtus kasvab nii $x$-i kahanemisel 0-ni kui ka $x$-i tõkestamatul kasvamisel. Kohal $x = 1$ omandab avaldis seega minimaalse väärtuse $y = 3$.

*Lahendus 6.* Tähistame $\frac{a}{c} = x$ ja $\frac{b}{c} = y$. Siis avaldub võrratuse vasak pool kujul $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$, kusjuures $2x^2 + y^2 = 9$. Avaldades siit $y$-i, võime ülesande taandada funktsiooni $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{9-2x^2}}$ miinimumi leidmisele. Funktsiooni tuletis on

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2}(9-2x^2)^{-\frac{3}{2}}(-4x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2x}{(9-2x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Tingimusest $f'(x) = 0$ saame võrrandi $\frac{2}{x^2} = \frac{2x}{(9-2x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ehk $x^3 = (9-2x^2)^{\frac{3}{2}}$ ehk $x = \sqrt{9-2x^2}$. Siit $x^2 = 9 - 2x^2$ ehk $3x^2 = 9$, millest $x = \sqrt{3}$. See on tõesti miinimumkoht, sest kui $x$ läheneb 0-le või $\frac{3}{\sqrt{2}}$-le, siis $f(x)$ kasvab piiramatult. Vaadeldava funktsiooni minimaalne väärtus on seega $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

*Lahendus 7.* Antud võrdus $2a^2 + b^2 = 9c^2$ on samaväärne võrdusega

$$\left(\frac{\sqrt{2}a}{3c}\right)^2 + \left(\frac{b}{3c}\right)^2 = 1.$$

Toome sisse uue muutuja $x$, mille korral $\sin x = \frac{\sqrt{2}a}{3c}$ ja $\cos x = \frac{b}{3c}$. Et $a$, $b$ ja $c$ on positiivsed, siis võime eeldada, et $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Siis omandab tõestatav võrratus kuju

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos x} \geqslant \sqrt{3}.$$

Tähistades $f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos x}$, saame

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^3 x - 2\sqrt{2}\cos^3 x}{3\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Nüüd $f'(x) = 0 \iff \sin^3 x - 2\sqrt{2}\cos^3 x = 0 \iff \sin^3 x = 2\sqrt{2}\cos^3 x \iff \tan^3 x = 2\sqrt{2} \iff \tan x = \sqrt{2}$. Seega $f'(x) = 0$ parajasti ühe argumendi väärtuse $x_0$ korral. Trigonomeetriavalemite põhjal $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\tan^2 x}$ ja $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, seega $\frac{1}{\sin x_0} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ja $\frac{1}{\cos x_0} = \sqrt{3}$. Siit

$$f(x_0) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

Võrratuse kehtimine on näidatud, kui tõestada, et ekstreemumkoht $x_0$ on miinimumkoht. Selleks võtame väärtused $x_1 = \frac{\pi}{4} < x_0$ ja $x_2 = \frac{\pi}{3} > x_0$ ning veendume, et $f(x_1) > \sqrt{3}$ ja $f(x_2) > \sqrt{3}$.

**5.** *Lahendus 1.* Üldisust kitsendamata eeldame, et $n \geqslant 2k$ (kui $n < 2k$, siis vahetame $k$ ja $n - k$ rollid). Olgu $p$ suvaline algarv. Vaatleme arve, mis jäävad järele avaldise

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

lugejas olevatest teguritest, kui nad kõik taandada suurima $p$ astmega, millega nad vastavalt jaguvad. Oletame, et mingid kaks neist $k$ jagatisest on võrdsed. Siis vastavad esialgsed arvud esituvad kujul $s \cdot p^i$ ja $s \cdot p^j$, kus $i > j$. Siis aga saame

$$n \geqslant s \cdot p^i \geqslant p \cdot s \cdot p^j > p \cdot (n-k) \geqslant 2 \cdot (n-k),$$

mis on vastuolus eeldusega $n \geqslant 2k$. Järelikult on saadud $k$ jagatist paarikaupa erinevad.

Et $1 < k < n-1$, siis esineb lugejas vähemalt kaks järjestikust naturaalarvu, millest vähemalt üks ei jagu $p$-ga. See arv $p$ astmetega jagamisel ei muutu ja eelduse $n \geqslant 2k$ tõttu on ta $k$-st suurem. Järelikult pärast $p$ astmetega läbijagamist jääb lugejasse $k$ erineva teguri korrutis, mis on suurem kui nimetaja $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1$. Seega ei saa lugejas sisalduvad $p$-st erinevad algtegurid nimetajaga taandamisel täiesti välja taanduda. Järelikult ei saa $\binom{n}{k}$ algteguriteks lahutus koosneda vaid $p$ astmest.

*Lahendus 2.* Oletame, et mingite $n$ ja $k$ korral

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = p^t,$$

kus $p$ on algarv ja $t$ mingi positiivne täisarv. Olgu $m$ selline arv hulgast $\{n, n-1, \ldots, n-k+1\}$, mille algteguriteks lahutuses on algteguri $p$ astendaja suurim. Siis arvude $n$, $n-1$, $\ldots$, $m+1$ algteguriteks lahutuses on $p$ astendaja sama mis vastavalt arvude $n-m$, $n-m-1$, $\ldots$, $1$ algteguriteks lahutuses ning arvude $m-1$, $\ldots$, $n-k+1$ algteguriteks lahutuses sama mis vastavalt arvude $1, \ldots, m-1-n+k$ algteguriteks lahutuses. Järelikult on arvu $p$ astendaja korrutise $n(n-1)\ldots(m+1)(m-1)\ldots(n-k+1)$ algteguriteks lahutuses sama mis arvu $(n-m)!\,(m-1-n+k)!$ algteguriteks lahutuses. Et

$$\frac{k!}{(n-m)!\,(m-1-n+k)!} = k \cdot \frac{(k-1)!}{(n-m)!\,(k-1-n+m)!} = k \cdot \binom{k-1}{n-m}$$

on täisarv, siis on $p$ astendaja arvu $(n-m)!\,(m-1-n+k)!$ algteguriteks lahutuses ülimalt nii suur kui arvu $k!$ algteguriteks lahutuses. Järelikult on algarvu $p$ astendaja arvu $\binom{n}{k}$ algteguriteks lahutuses ülimalt nii suur kui arvu $m$ algteguriteks lahutuses. See on aga vastuolu, sest antud eeldustel $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{2} > n \geqslant m$.

*Lahendus 3.* Tähistagu $p \rhd x$ algarvu $p$ astendajat positiivse täisarvu $x$ algteguriteks lahutuses. Legendre'i valemi põhjal

$$p \rhd m! = \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor,$$

kus $i$ on suurim selline täisarv, et $p^i \leqslant m$. Siis

$$p \rhd \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = p \rhd n! - p \rhd k! - p \rhd (n-k)! =$$

$$= \left( \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p} \right\rfloor \right) + \left( \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^2} \right\rfloor \right) + \ldots$$
$$\ldots + \left( \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor \right),$$

kus $i$ on suurim selline täisarv, et $p^i \leqslant n$.

Et $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, siis $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$. Järelikult $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ või $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$. Iga $j$ korral niisiis

$$\left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{p^j} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-k}{p^j} \right\rfloor \qquad \text{või} \qquad \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{p^j} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-k}{p^j} \right\rfloor + 1,$$

seega $p \rhd \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ lahtikirjutises on iga omaette sulgudes oleva liidetava väärtus 0 või 1. Kokkuvõttes

$$p \rhd \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \leqslant i,$$

mistõttu $p$ aste arvu $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ algteguriteks lahutuses on ülimalt $n$.

Et vastavalt eeldusele $1 < k < n - 1$, siis $\binom{n}{k} > n$, mistõttu arvu $\binom{n}{k}$ algteguriteks lahutus peab sisaldama mitme algarvu astmeid.

*Lahendus 4.* Kasutame Kummeri teoreemi, mille kohaselt $p \rhd \binom{n}{k}$ võrdub arvude $k$ ja $n - k$ liitmisel $p$-ndsüsteemis toimuvate ülekannete arvuga. Ülekannete arv liitmisel on ülimalt $a - 1$, kus $a$ on summa numbrite arv. Numbrite arv aga on $i + 1$, kus $i$ on suurim täisarv, mille korral $p^i \leqslant n$. Kokkuvõttes

$$p \rhd \binom{n}{k} \leqslant i,$$

mistõttu $p$ aste arvu $\binom{n}{k}$ algteguriteks lahutuses on ülimalt $n$. Et $\binom{n}{k} > n$, siis peab $\binom{n}{k}$ jaguma veel mingi algarvuga.

*Märkus* Lahendustest 2, 3, ja 4 järeldub muu hulgas, et algarvu aste binoomkordaja $\binom{n}{k}$ algteguriteks lahutuses on ülimalt $n$.

**6.** *Vastus:* $n - m + 1$.

*Lahendus 1.* Tõestame, et kui $m \leqslant n$, siis saab alati ühe veeru punaseks värvida. Siis jättes selle veeru vaatluse alt välja, saame protsessi jätkata kuni hetkeni, mil veergude arv on muutunud ridade arvust väiksemaks, st $n - m + 1$ korda.

Oletame väitevastaselt, et ühtegi veergu ei saa punaseks värvida nii, et sarnaseid ridu ei teki. Siis leidub iga veeru korral vähemalt kaks rida, mis erinevad ainult ühe ruudu poolest selles veerus. Valime iga veeru korral sellised kaks rida välja. Vaatleme graafi, mille tippudeks on read ja servadeks väljavalitud ridade paarid. Et saadud graafil on servi vähemalt niisama palju kui tippe, leidub graafis tsükkel. Vaatleme sellel tsüklil mingit rida (st tippu) $x$. Siis talle tsüklil järgnev rida erineb reast $x$ täpselt ühe ruudu poolest, asugu see ruut veerus $y$. Iga järgnev rida erineb eelmisest täpselt ühes veerus. Et need veerud erinevad kõik veerust $y$, siis vastavad kõik ülejäänud servad sellel tsüklil sellistele üleminekutele ühest reast teise, kus veeru $y$ ruut jääb samaks. Seega jääb veeru $y$ ruut samaks kõigis reale $x$ järgnevates ridades ning peaks jääma samaks ka viimasel üleminekul, mis viib tagasi ritta $x$. Seega peaks rea $x$ ruut olema sama värvi nagu reale $x$ järgneva rea ruut, vastuolu.

Rohkem ridu üldiselt punaseks värvida ei saa. Olgu esialgu mustaks värvitud kõik ruudud, välja arvatud üks $m \times m$-alamruudustiku diagonaal. Kui värvime punaseks $n-m+2$ veergu, satuvad vähemalt 2 veergu alati sellesse alamruudustikku. Nii aga värvime üle kahes reas ainsad valged ruudud, mistõttu järele jääb kaks ühtemoodi värvitud rida.

*Lahendus 2.* (Jaan Toots) Hakkame tabelit veergude kaupa läbi vaatama. Esimene veerg jagab kõigi ridade hulga kaheks osahulgaks: ühes neist on read, mille 1. veerus on valge ruut, teises read, mille 1. veerus on must ruut. Kui esimeses veerus on kõik ruudud valged või kõik ruudud mustad, siis võib selle veeru punaseks värvida. Iga järgmise veeru korral tükeldame eelmisel sammul saadud osahulgad omakorda vastavalt sellele, kas nendes ridades on selles veerus must või valge ruut. Kui sellel sammul ühtegi osahulka ei tükeldata, siis värvime selle veeru punaseks. Kokkuvõttes iga veeru korral kas osahulkade arv suureneb vähemalt ühe võrra või see veerg värvitakse punaseks. Et alguses oli meil üks hulk ja lõpus on meil $m$ ühest reast koosnevat osahulka, siis on punaseks värvimata veergude arv maksimaalselt $m-1$, seega punaseks värvitud veergude arv on vähemalt $k = n-m+1$. Kõik read on endiselt jäänud erinevaks, sest me värvime üle ainult need veerud, milles pole uut informatsiooni ridade erinevuse kohta võrreldes eelnevate veergudega.

Seda, et leidub värvimine, mille korral rohkem veerge punaseks värvida ei saa, saab näidata nagu esimeses lahenduses.

*Lahendus 3.* (Aleksandr Šved) Näitame matemaatilise induktsiooni abil ridade arvu järgi, et alati saab vähemalt $k = n - m + 1$ veergu punaseks värvida. Kui $m = 1$, siis võib ilmselt kõik veerud punaseks värvida, st $k = n = n - m + 1$. Oletame nüüd, et kui $m = l$, siis saab punaseks värvida vähemalt $n - l + 1$ veergu nii, et kõik read jäävad erinevaks. Vaatleme juhtu $m = l + 1$. Induktsiooni eelduse tõttu saame punaseks värvida vähemalt $n - l + 1$ veergu nii, et esimesed $l$ rida jäävad erinevaks. Kui pärast seda värvimist ka viimane rida on kõigist teistest erinev, siis on meil tingimused täidetud ning saime punaseks värvida vähemalt $n - m + 2$ veergu. Kui viimane rida on mõne eelnevaga samasugune (selliseid ridu saab olla ainult üks), siis, kuna read olid alguses kõik erinevad, leidub veerg, kus viimane rida ja temaga pärast värvimist sarnane rida erinevad. Kui see veerg jätta värvimata, siis on kõik read erinevad ning saame punaseks värvida $n - m + 1$ veergu.

Seda, et leidub värvimine, mille korral rohkem veerge punaseks värvida ei saa, saab näidata nagu esimeses lahenduses.