

IMO'11 Eesti võistkonna valikvõistlus

20.–21. aprill 2011

Esimene päev

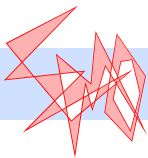
Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kaks ringjoont asuvad tervikuna teineteisest väljas. Olgu A nende ringjoonte sisemiste ühispuutujate lõikepunkt ning K selle punkti projektsioon ringjoonte välisele ühispuutujale. Punktist K tõmmatud, ühispuutujast erinevad puutujad puutuvad ringjooni punktides M_1 ja M_2 . Tõesta, et sirge AK poolitab nurga M_1KM_2 .
2. Olgu n positiivne täisarv. Tõesta, et arvu $1 + 2 + \dots + n$ iga teguri m korral, kus $m \geq n$, saab hulga $\{1, 2, \dots, n\}$ tükeldada lõikumatuks alamhulkadeks nii, et iga alamhulga elementide summa on m .
3. Kas leidub selline tehe $*$ kõigi täisarvude hulgal, mis rahuldab korraga järgmisi tingimusi:
 - (1) suvaliste täisarvude x, y, z korral $(x * y) * z = x * (y * z)$;
 - (2) suvaliste täisarvude x, y korral $x * x * y = y * x * x = y$?



IMO'11 Eesti võistkonna valikvõistlus

20.–21. aprill 2011

Teine päev

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

4. Olgu a , b , c positiivsed reaalarvud, mille korral $2a^2 + b^2 = 9c^2$. Tõesta võrratus

$$\frac{2c}{a} + \frac{c}{b} \geq \sqrt{3}.$$

5. Tõesta, et kui n ja k on positiivsed täisarvud, mille korral $1 < k < n - 1$, siis arv $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ jagub vähemalt kahe erineva algarvuga. (Kirjutis $x!$ tähistab korrutist $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot x$.)
6. Ruudustikus, milles on m rida ja n veergu, kusjuures $m \leq n$, värvitakse osa ruute mustaks nii, et iga kaks rida on värvitud erinevalt. Leia suurim selline täisarv k , et iga esialgse värvimise korral saab teatavad k veergu värvida üleni punaseks nii, et iga kaks rida jäävad ikka erinevalt värvituks.