IMO'10 Eesti võistkonna valikvõistlus

6.–7. aprill 2010 **Esimene päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Positiivsete täisarvude a, b korral tähistame $a \ominus b = \dfrac{a-b}{\text{SÜT}\,(a,b)}$.

Olgu n positiivne täisarv. Tõesta, et järgmised tingimused on samaväärsed:

(i) $\text{SÜT}\,(n, n \ominus m) = 1$ iga arvust n väiksema positiivse täisarvu m korral;

(ii) $n = p^k$, kus p on mingi algarv ja k mittenegatiivne täisarv.

2. Olgu n fikseeritud positiivne täisarv. Leia suurim täisarv N, mille jaoks leidub selline komplekt n kaaluvihist, mida kasutades on kahe kaalukausiga kangkaalul võimalik täpselt tuvastada kõik massid $1, 2, \ldots, N$ (st tundmatu massiga keha korral kindlaks teha, kas tema mass on üks neist, ja milline nimelt).

3. Kolmnurga nurgad on α, β ja γ, ümbermõõt $2p$ ning ümberringjoone raadius R. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\cot^2\alpha + \cot^2\beta + \cot^2\gamma \geqslant 3\left(\frac{9R^2}{p^2} - 1\right).$$

Millal kehtib võrdus?

IMO'10 Eesti võistkonna valikvõistlus

6.–7. aprill 2010 **Teine päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

4. Teravnurkses kolmnurgas ABC on nurk C suurem nurgast A. Olgu AE kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter. Kiir AC ning punktist B kolmnurga ABC ümberringjoonele tõmmatud puutuja lõikuvad punktis K. Sirgele AE punktist K tõmmatud ristsirge lõikab kolmnurga BCK ümberringjoont teist korda punktis D. Tõesta, et CE on nurga BCD poolitaja.

5. Kahe muutuja polünoomi $P(x, y) = a_1 x^{i_1} y^{j_1} + \ldots + a_m x^{i_m} y^{j_m}$ nimetame *homogeenseks*, kui tema kõigil liikmetel on muutujate astendajate summa sama, st $i_1 + j_1 = \ldots = i_m + j_m$.

Olgu $P(x, y)$ selline mittekonstantne reaalarvuliste kordajatega homogeenne polünoom, et iga reaalarvu t korral kehtib võrdus $P(\sin t, \cos t) = 1$. Tõesta, et polünoom P esitub kujul

$$P(x, y) = (x^2 + y^2)^k ,$$

kus k on mingi positiivne täisarv.

6. Ruudustikus suurusega $n \times n$ värvitakse osa ruute punaseks ja ülejäänud siniseks nii, et selle 2×2 alamruudustike seas esinevad kõik võimalikud 2×2 ruudustiku värvimised nende kahe värviga (pöörete ja peegelduste abil üksteisest saadavad värvimised loeme erinevateks).

a) Leia arvu n vähim võimalik väärtus.

b) Leia selle vähima n korral punaste ruutude vähim võimalik arv.

Отборочный конкурс на ММО'10

6–7 апреля 2010 г. **Первый день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Для положительных целых чисел a, b обозначим $a \ominus b = \dfrac{a-b}{\text{НОД}\,(a,b)}$.

Пусть n – положительное целое число. Доказать, что следующие условия равнозначны:

(i) $\text{НОД}\,(n, n \ominus m) = 1$ для каждого положительного целого числа m, меньшего числа n;

(ii) $n = p^k$, где p – некоторое простое число, а k – неотрицательное целое число.

2. Пусть n – фиксированное положительное целое число. Найти наибольшее целое число N, для которого найдётся такой комплект из n гирек, используя который можно при помощи двухчашечных весов точно определить все массы $1, 2, \ldots, N$ (т.е. для тела с неизвестной массой определить, является ли его масса одной из них, и какой именно).

3. Углы треугольника равны α, β и γ, периметр – $2p$, и радиус описанной окружности – R. Доказать, что выполняется неравенство

$$\cot^2\alpha + \cot^2\beta + \cot^2\gamma \geqslant 3\left(\frac{9R^2}{p^2} - 1\right).$$

Когда выполняется равенство?

Отборочный конкурс на ММО'10

6–7 апреля 2010 г. **Второй день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. В остроугольном треугольнике ABC угол C больше угла A. Пусть AE – диаметр описанной окружности треугольника ABC. Луч AC и касательная к описанной окружности треугольника ABC, проведённая через точку B, пересекаются в точке K. Перпендикуляр к прямой AE, проведённый через точку K, пересекает описанную окружность треугольника BCK второй раз в точке D. Доказать, что CE – биссектриса угла BCD.

5. Многочлен от двух переменных $P(x,y) = a_1 x^{i_1} y^{j_1} + \ldots + a_m x^{i_m} y^{j_m}$ назовём *однородным*, если сумма степеней переменных всех его членов одинакова, т.е. $i_1 + j_1 = \ldots = i_m + j_m$.

Пусть $P(x,y)$ – такой непостоянный однородный многочлен с действительными коэффициентами, что при каждом действительном числе t выполняется равенство $P(\sin t, \cos t) = 1$. Доказать, что многочлен P можно представить в виде

$$P(x,y) = (x^2 + y^2)^k\,,$$

где k – некоторое положительное целое число.

6. В клетчатом поле размера $n \times n$ часть клеток закрашивают красными и остальные синими так, что среди квадратов 2×2 присутствуют все возможные раскраски квадрата 2×2 этими двумя цветами (раскраски, полученные друг от друга при помощи поворотов и отражений, считаем различными).

а) Найти наименьшее возможное значение числа n.

б) Найти наименьшее возможное число красных клеток при этом наименьшем n.

Lahendused

1. Paneme esmalt tähele, et kehtib taandamisreegel $da \ominus db = a \ominus b$. Tõepoolest, mistahes positiivsete täisarvude a, b ja d korral

$$da \ominus db = \frac{da - db}{\text{SÜT}\,(da, db)} = \frac{d \cdot (a-b)}{d \cdot \text{SÜT}\,(a,b)} = \frac{a-b}{\text{SÜT}\,(a,b)} = a \ominus b\,.$$

Näitame nüüd, et kui n on algarvu aste ja $m < n$, siis arv $n \ominus m$ on ühistegurita arvuga n. Tõepoolest, olgu $n = p^k$, kus p on algarv, ja $m = p^i s$, kus $\text{SÜT}\,(p, s) = 1$. Kuna $m < n$, siis $i < k$. Taandamisreegli abil saame

$$n \ominus m = p^{k-i} \ominus s = \frac{p^{k-i} - s}{\text{SÜT}\,(p^{k-i}, s)} = p^{k-i} - s\,,$$

sest kuna $\text{SÜT}\,(p, s) = 1$, siis ka $\text{SÜT}\,(p^{k-i}, s) = 1$. Et samal põhjusel ka $\text{SÜT}\,(p, p^{k-i} - s) = 1$, siis

$$\text{SÜT}\,(n, n \ominus m) = \text{SÜT}\,(p^k, p^{k-i} - s) = 1\,.$$

Jääb üle veenduda, et kui n ei ole algarvu aste, siis leidub selline positiivne täisarv m, et $m < n$ ning arvudel $n \ominus m$ ja n on ühistegur. Kuna n ei ole algarvu aste, siis on tal vähemalt kaks erinevat algtegurit. Olgu p ja q arvu n mingid algtegurid, kusjuures $p < q$. Olgu $n = p^k t$, kus $\text{SÜT}\,(p, t) = 1$. Võtame $m = n - p^{k+1}$. Et n jagub arvudega p^k ja q, mis on ühistegurita, siis ta jagub ka nende korrutisega $p^k q$; järelikult $p^{k+1} < p^k q \leqslant n$, st $0 < m < n$. Nüüd

$$n \ominus m = n \ominus (n - p^{k+1}) = t \ominus (t - p) = \frac{t - (t-p)}{\text{SÜT}\,(t, t-p)} = \frac{p}{\text{SÜT}\,(t, p)} = p\,,$$

sest $\text{SÜT}\,(t, p) = 1$. Näeme, et arvudel $n \ominus m$ ja n on ühistegur $p > 1$.

2. *Vastus:* $\dfrac{3^n - 1}{2}$.

Võimalus tuvastada mass m tähendab võimalust paigutada vihid kaalukaussidele nii, et ühel ja teisel kaalukausil olevate vihtide kogumasside vahe on parajasti m.

Iga kaaluviht saab asuda kas esimesel kaalukausil, teisel kaalukausil või mitte kummalgi. Kokku saame n kaaluvihi jaoks 3^n võimalikku paigutust. Paneme seejuures tähele, et paigutus, kus kaussidel ei asu ükski kaaluviht, ei võimalda tuvastada ühtki vaadeldavat massi. Samuti saame igast paigutusest sümmeetrilise paigutuse (mis võimaldab tuvastada sama massi), kui vahetame ära kõik esimesel kaalukausil olevad vihid teisel kaalukausil olevate vihtidega. Järelikult saab n kaaluvihi abil tuvastatavaid erinevaid masse olla ülimalt $\frac{3^n - 1}{2}$.

Näitame nüüd induktsiooniga, et n kaaluvihi abil, mille massid on $1, 3, \ldots, 3^{n-1}$, saame tõepoolest tuvastada kõik massid 1 kuni $\frac{3^n - 1}{2}$. Juhul $n = 1$ on väide ilmne, sest $\frac{3^1 - 1}{2} = 1$. Eeldame nüüd, et väide kehtib $n = k$ jaoks, ning veendume, et see kehtib siis ka $n = k + 1$ jaoks.

Induktsiooni eelduse kohaselt saame massidega $1, 3, \ldots, 3^{k-1}$ kaaluvihtide abil tuvastada kõik massid 1 kuni $\frac{3^k - 1}{2}$. Võttes nüüd lisaks kasutusele kaaluvihi massiga 3^k, saame ilmselt tuvastada ka massi 3^k, aga samuti kõik massid

$$3^k + 1, \ldots, 3^k + \frac{3^k - 1}{2}$$

ning

$$3^k - 1, \ldots, 3^k - \frac{3^k - 1}{2} .$$

Kuna aga $3^k - \frac{3^k - 1}{2} = \frac{3^k - 1}{2} + 1$ ning $3^k + \frac{3^k - 1}{2} = \frac{3^{k+1} - 1}{2}$, siis saame nüüd lisaks massidele 1 kuni $\frac{3^k - 1}{2}$ tuvastada ka kõik massid $\frac{3^k - 1}{2} + 1$ kuni $\frac{3^{k+1} - 1}{2}$.

3. *Vastus:* võrdus kehtib, kui kolmnurk on võrdkülgne.

Lahendus 1. Olgu nurkade α, β ja γ vastaskülgede pikkused vastavalt a, b ja c.

Et $\cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1$ ja siinusteoreemist $\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{2R}{a}$, siis $\cot^2 \alpha = \frac{4R^2}{a^2} - 1$; analoogiliselt ka $\cot^2 \beta = \frac{4R^2}{b^2} - 1$ ja $\cot^2 \gamma = \frac{4R^2}{c^2} - 1$. Tõestatav võrratus omandab niisiis kuju

$$4R^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) - 3 \geqslant 3 \cdot \left(\frac{4 \cdot 9R^2}{(a+b+c)^2} - 1 \right) ,$$

ehk

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant\frac{27}{(a+b+c)^2}\,.$$

Jagades selle võrratuse pooled 3-ga ja võttes mõlemal pool ruutjuure, saame samaväärse võrratuse

$$\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}\geqslant\frac{3}{(a+b+c)}\,.$$

Siin on vasakul pool arvude $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ruutkeskmine ja paremal pool samade arvude harmooniline keskmine — järelikult see võrratus kehtib.

Võrdus kehtib siin parajasti siis, kui $a=b=c$, st kolmnurk on võrdkülgne.

Lahendus 2. Samuti nagu eelmises lahenduses olgu a, b ja c vastavalt nurkade α, β ja γ vastaskülgede pikkused. Siinusteoreemist näeme, et kolmnurga nurkade siinused on alati järjestatud samas järjekorras nagu nende nurkade vastaskülgede pikkused, ning siinuste pöördväärtused seega vastupidises järjekorras. Seega saame Tšebõševi võrratust kasutades:

$$18R=3\left(\frac{a}{\sin\alpha}+\frac{b}{\sin\beta}+\frac{c}{\sin\gamma}\right)\leqslant(a+b+c)\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right)\,,$$

millest järeldub, et

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\geqslant\frac{18R}{a+b+c}=\frac{9R}{p}\,.$$

Selle võrratuse vasakut poolt hindame ülalt aritmeetilise ja ruutkeskmise vahelise võrratuse abil:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}&\leqslant\sqrt{3\cdot\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)}=\\&=\sqrt{3\cdot(3+\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma)}\,.\end{aligned}$$

Saadud tulemusi kombineerides saame, et

$$\sqrt{3\cdot(3+\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma)}\geqslant\frac{9R}{p}\,,$$

mida ruutu tõstes saame

$$3\cdot(3+\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma)\geqslant\frac{(9R)^2}{p^2}$$

ehk

$$\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geqslant\frac{3\cdot 9R^2}{p^2}-3=3\left(\frac{9R^2}{p^2}-1\right)\,.$$

Võrdus kehtib keskmistevahelises võrratuses, kui $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\gamma}$, ning Tšebõševi võrratuses, kui $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\gamma}$ või $a = b = c$. Kokkuvõttes kehtib võrdus parajasti võrdkülgse kolmnurga korral.

Lahendused

4. Paneme tähele, et $\angle ACE = \angle ECK = 90°$, kuna AE on kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter. Seega piisab näidata, et $\angle ACB = \angle DCK$ (vt joonist 1).

Olgu L sirgete AE ja DK lõikepunkt. Siis

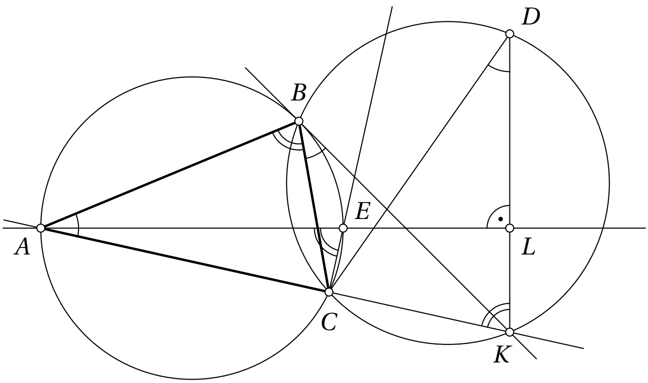
$$\angle BAC = \angle CBK = \angle CDK\,,$$

kus esimene võrdus kehtib vastavalt teoreemile puutujast ja lõikajast ning teine piirdenurkade omaduse põhjal. Samuti

$$\angle ABC = \angle AEC = \angle CKD\,,$$

kus esimene võrdus kehtib piirdenurkade omaduse põhjal ja teine tuleneb täisnurksete kolmnurkade ACE ja ALK sarnasusest.

Niisiis on kolmnurgad ABC ja DKC sarnased, st tõepoolest kehtib võrdus $\angle ACB = \angle DCK$.



Joonis 1

5. Olgu vaadeldava homogeense polünoomi P aste n, st

$$P(x, y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \ldots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n\,,$$

kus $n > 0$. Paneme tähele, et n peab olema paarisarv, sest muidu saame ülesande tingimusest $P(\sin t, \cos t) = 1$ argumendi $t = 0$ korral, et $a_0 = 1$, ning $t = \pi$ korral, et $a_0 = -1$.

Et polünoomil P vabaliige puudub, siis $P(0,0) = 0$. Olgu nüüd x ja y mistahes reaalarvud, millest vähemalt üks ei ole 0, ja võtame $c = \sqrt{x^2 + y^2}$. Kuna

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1\,,$$

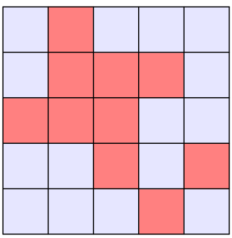
siis leidub selline reaalarv t, et $\sin t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ja $\cos t = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ning vastavalt ülesande tingimusele $P(\sin t, \cos t) = 1$. Et homogeensuse tõttu $P(x,y) = c^n \cdot P\left(\dfrac{x}{c}, \dfrac{y}{c}\right)$, siis saame

$$P(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n \cdot P\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n\,.$$

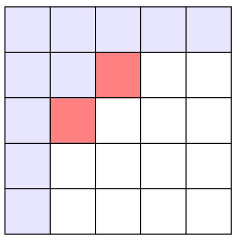
Olgu nüüd $n = 2k$, siis $P(x,y) = (x^2+y^2)^k$, kusjuures see võrdus kehtib ka $x = y = 0$ korral, kuna $P(0,0) = 0$.

6. *Vastus:* a) 5, b) 10.

a) Et 2×2 alamruudustiku värvimiseks kahe värviga on $2^4 = 16 = 4^2$ võimalust ning $n \times n$ ruudustik sisaldab $(n-1)^2$ sellist alamruudustikku, siis peab olema $n - 1 \geqslant 4$, ehk $n \geqslant 5$. Nõutava omadusega värvimine $n = 5$ jaoks on esitatud joonisel 2.



Joonis 2



Joonis 3

b) Joonisel 2 esitatud värvimine sisaldab 10 punast ruutu — näitame, et see ongi vähim võimalik arv.

Paneme tähele, et 5×5 ruudustikus on 4 nurgaruutu, 12 küljeruutu (mis ei ole nurgaruudud), ning 9 sisemist ruutu. Seejuures iga nurgaruut sisaldub parajasti ühes, küljeruut kahes ja sisemine ruut neljas 2×2 alamruudustikus. Kõik 2×2 alamruudustiku 16 värvimist kokku sisaldavad $16 \cdot 4 = 64$

ruutu, millest sümmeetria tõttu 32 on punased. Seega, kui 5×5 ruudustikus on kokku k punast ruutu ning neist a on nurgaruudud, b küljeruudud ja c sisemised ruudud, siis $a + b + c = k$ ja $a + 2b + 4c = 32$.

Võrrandist $a + 2b + 4c = 32$ saame, et $c \leqslant 8$, ning kui $c = 8$, siis $a = b = 0$. Kui $c = 7$, siis ainus võimalus, kus $k < 10$, on $b = 2$ ja $a = 0$. Kui aga $c \leqslant 6$, siis igal juhul $k = a + b + c \geqslant 10$.

Niisiis piisab näidata, et ei leidu nõutava omadusega värvimist, kus $a = 0$ ja $b \leqslant 2$. Tõepoolest, sellisel juhul on 5×5 ruudustikus vähemalt kaks serva, mis ei sisalda ühtki punast ruutu — üldisust kitsendamata olgu üks neist ruudustiku ülemine serv. Eespool nägime, et $n = 5$ korral peab 2×2 alamruudustiku iga värvimisviis esinema täpselt üks kord. Et 2×2 alamruudustiku 16 värvimise seas on 4 sellist, kus mõlemad ülemised ruudud on sinised, ning ruudustiku kahes ülemises reas paiknevaid 2×2 alamruudustikke on parajasti 4, siis peavad kõik 4 sellist värvimist esinema ruudustiku kahes ülemises reas — sh ka see värvimine, kus kõik ruudud on sinised. Et sama arutlus kehtib ka ruudustiku teise serva kohta, kus ei ole ühtegi punast ruutu, siis peavad need kaks serva kohtuma ühes nurgas ja 2×2 alamruudustik, mille kõik ruudud on sinised, peab asuma selles nurgas. Üldisust kitsendamata olgu see teine serv vasakpoolne, siis joonisel 3 näidatud kaks ruutu peavad olema punased, sest vastasel korral oleks ruudustikus rohkem kui üks 2×2 alamruudustik, mille kõik ruudud on sinised. Nüüd on aga ruudustikus kaks sellist 2×2 alamruudustikku, mille parempoolne alumine ruut on punane ja ülejäänud ruudud sinised. Seega $a = 0$ ja $b \leqslant 2$ jaoks nõutavat värvimist ei leidu ning vähim võimalik punaste ruutude arv on $k = 10$.

Hindamisskeemid

1. *(Härmel Nestra)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et väitest (ii) järeldub väide (i): 3 p
- Tõestatud, et väitest (i) järeldub väide (ii): 4 p

Väikeste puuduste korral arutluses anti 1 punkt vähem.

Väitest (i) väite (ii) tuletamise juures oli arvu m konstrueerimisel mitmes töös jäetud mainimata osa tingimusi, ilma milleta ei olnud vajalike suurimate ühistegurite suurus üheselt määratud, kuid arutelu tervikuna järgis siiski õiget rada. Sellised tööd said 2 punkti vähem.

2. *(Toomas Krips)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et $N \leqslant \dfrac{3^n - 1}{2}$: 3 p
- Leitud sobiv kaaluvihtide komplekt: 2 p
- Tõestatud, et selle komplekti abil saab tuvastada kõik massid 1 kuni $\dfrac{3^n - 1}{2}$: 2 p

Mitmed olid teinud kitsendava lisaeelduse, et kaaluvihte võib asetada ainult ühele kaalukausile. Kuna selle kitsendusega lahendus on analoogiline õige lahendusega, kuid sellest mõnevõrra lihtsam, siis anti sellise lahenduse eest punkte järgnevalt:

- Tõestatud, et $N \leqslant 2^n - 1$: 2 p
- Leitud sobiv kaaluvihtide komplekt: 1 p
- Tõestatud, et selle komplekti abil saab tuvastada kõik massid 1 kuni $2^n - 1$: 1 p

Ülesannet oli valesti tõlgendatud veel teistelgi viisidel. Sellisel juhul võis kasulike tähelepanekute või mõttekäikude eest saada kuni 1 punkti.

3. *(Laur Tooming)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Kasutatud võrdust $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$: 1 p
- Kasutatud võrdust $\dfrac{a}{\sin \alpha} = 2R$: 1 p

- Teisendatud võrratus samaväärsele kujule, kus esinevad ainult kolmnurga küljepikkused või ainult nurkade siinused: 1 p
- Kasutatud sobivalt keskmistevahelist võrratust: 1 p
- Võrratuse tõestus lõpule viidud: 2 p
- Põhjendatud, miks võrdus kehtib parajasti võrdkülgse kolmnurga korral: 1 p

Muidu täieliku lahenduse korral anti 1 punkt vähem, kui mõni samm oli ebapiisavalt põhjendatud.

Siinusteoreemi kasutamise eest ilma ümberringjoone raadiuseta (kujul $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$) punkti ei saanud.

Hindamisskeemid

4. *(Oleg Košik)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täielik lahendus: 7 p
- Täielik lahendus väikese puudujäägiga: 6 p
- Õige lahendus eeldusel, et punktid A, B, D asuvad ühel sirgel: 4 p
- Tehtud mõned kasulikud tähelepanekud, aga terviklik lahendus puudub: 1–3 p

5. *(Aleksei Lissitsin)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täielik lahendus: 7 p
- Muidu õige lahendus, kuid kasutatud väide, et polünoomil esinevad vaid paarisastmetega liikmed, ei ole korralikult põhjendatud: 5 p
- Sarnane eelmisega, kuid lisaks ei ole ka lahenduse lõpuosa korralikult põhjendatud: 3 p
- On idee vaadelda homogeenset polünoomi $P - (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$: 2 p
- On ainult tõestatud, et polünoomi aste $n = i_k + j_k$ on paarisarv: 1 p
- On ainult homogeenne polünoom kirja pandud lihtsamal kujul $P(x, y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \ldots + a_0 y^n$: 1 p

6. *(Urve Kangro)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud, et $n \geqslant 5$: 1 p
- Toodud näide sobiva värvimise kohta $n = 5$ korral: 1 p
- Toodud näide sellise värvimise kohta $n = 5$ korral, kus punaste ruutude arv on 10: 1 p
- Põhjendatud, miks vähem kui 10 punase ruuduga pole võimalik 5×5 ruudustikku nõutaval viisil värvida: 4 p

Mitmel õpilasel olid a) ja b) osa jaoks toodud erinevad näited. Kui sama näide sobis nii a) kui b) osa jaoks, sai selle eest 2 punkti.

Põhjendused, miks vähem kui 10 punase ruuduga värvimist ei leidu, olid enamasti puudulikud. Variantide läbivaatamisel ei olnud tihti kõiki võimalikke variante vaadeldud või polnud piisavalt põhjendatud, miks üks või teine paigutus ei sobi. Üsna tihti oli ekslikult (näiteks paarsuse kaalutlustel) arvatud, et $n = 5$ ei sobi. Need lahendused said reeglina 1 punkti.

Näidete eest juhul $n = 6$ punkte ei saanud, välja arvatud ühel juhul, kus 1 punkti sai 9 punase ruuduga värvimise eest, mis juhul $n = 6$ on tõesti minimaalne.