Отборочный конкурс на ММО'10

6–7 апреля 2010 г. **Первый день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Для положительных целых чисел a, b обозначим $a \ominus b = \dfrac{a-b}{\text{НОД}\,(a,b)}$.

Пусть n – положительное целое число. Доказать, что следующие условия равнозначны:

(i) $\text{НОД}\,(n, n \ominus m) = 1$ для каждого положительного целого числа m, меньшего числа n;

(ii) $n = p^k$, где p – некоторое простое число, а k – неотрицательное целое число.

2. Пусть n – фиксированное положительное целое число. Найти наибольшее целое число N, для которого найдётся такой комплект из n гирек, используя который можно при помощи двухчашечных весов точно определить все массы $1, 2, \ldots, N$ (т.е. для тела с неизвестной массой определить, является ли его масса одной из них, и какой именно).

3. Углы треугольника равны α, β и γ, периметр – $2p$, и радиус описанной окружности – R. Доказать, что выполняется неравенство

$$\cot^2\alpha + \cot^2\beta + \cot^2\gamma \geqslant 3\left(\frac{9R^2}{p^2} - 1\right).$$

Когда выполняется равенство?

Отборочный конкурс на ММО'10

6–7 апреля 2010 г. **Второй день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. В остроугольном треугольнике ABC угол C больше угла A. Пусть AE – диаметр описанной окружности треугольника ABC. Луч AC и касательная к описанной окружности треугольника ABC, проведённая через точку B, пересекаются в точке K. Перпендикуляр к прямой AE, проведённый через точку K, пересекает описанную окружность треугольника BCK второй раз в точке D. Доказать, что CE – биссектриса угла BCD.

5. Многочлен от двух переменных $P(x,y) = a_1 x^{i_1} y^{j_1} + \ldots + a_m x^{i_m} y^{j_m}$ назовём *однородным*, если сумма степеней переменных всех его членов одинакова, т.е. $i_1 + j_1 = \ldots = i_m + j_m$.

Пусть $P(x,y)$ – такой непостоянный однородный многочлен с действительными коэффициентами, что при каждом действительном числе t выполняется равенство $P(\sin t, \cos t) = 1$. Доказать, что многочлен P можно представить в виде
$$P(x,y) = (x^2 + y^2)^k,$$
где k – некоторое положительное целое число.

6. В клетчатом поле размера $n \times n$ часть клеток закрашивают красными и остальные синими так, что среди квадратов 2×2 присутствуют все возможные раскраски квадрата 2×2 этими двумя цветами (раскраски, полученные друг от друга при помощи поворотов и отражений, считаем различными).

а) Найти наименьшее возможное значение числа n.

б) Найти наименьшее возможное число красных клеток при этом наименьшем n.