

Отборочный конкурс на ММО'10

6–7 апреля 2010 г.

Первый день

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.

Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

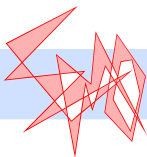
1. Для положительных целых чисел a, b обозначим $a \ominus b = \frac{a - b}{\text{НОД}(a, b)}$.

Пусть n – положительное целое число. Доказать, что следующие условия равнозначны:

- (i) $\text{НОД}(n, n \ominus m) = 1$ для каждого положительного целого числа m , меньшего числа n ;
 - (ii) $n = p^k$, где p – некоторое простое число, а k – неотрицательное целое число.
2. Пусть n – фиксированное положительное целое число. Найти наибольшее целое число N , для которого найдётся такой комплект из n гирек, используя который можно при помощи двухчашечных весов точно разделить все массы $1, 2, \dots, N$ (т.е. для тела с неизвестной массой определить, является ли его масса одной из них, и какой именно).
3. Углы треугольника равны α, β и γ , периметр – $2p$, и радиус описанной окружности – R . Доказать, что выполняется неравенство

$$\cot^2 \alpha + \cot^2 \beta + \cot^2 \gamma \geq 3 \left(\frac{9R^2}{p^2} - 1 \right).$$

Когда выполняется равенство?



Отборочный конкурс на ММО'10

6–7 апреля 2010 г.

Второй день

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.

Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. В остроугольном треугольнике ABC угол C больше угла A . Пусть AE – диаметр описанной окружности треугольника ABC . Луч AC и касательная к описанной окружности треугольника ABC , проведённая через точку B , пересекаются в точке K . Перпендикуляр к прямой AE , проведённый через точку K , пересекает описанную окружность треугольника BCK второй раз в точке D . Доказать, что CE – биссектриса угла BCD .
5. Многочлен от двух переменных $P(x, y) = a_1 x^{i_1} y^{j_1} + \dots + a_m x^{i_m} y^{j_m}$ назовём *однородным*, если сумма степеней переменных всех его членов одинакова, т.е. $i_1 + j_1 = \dots = i_m + j_m$.

Пусть $P(x, y)$ – такой непостоянный однородный многочлен с действительными коэффициентами, что при каждом действительном числе t выполняется равенство $P(\sin t, \cos t) = 1$. Доказать, что многочлен P можно представить в виде

$$P(x, y) = (x^2 + y^2)^k,$$

где k – некоторое положительное целое число.

6. В клетчатом поле размера $n \times n$ часть клеток закрашивают красными и остальные синими так, что среди квадратов 2×2 присутствуют все возможные раскраски квадрата 2×2 этими двумя цветами (раскраски, полученные друг от друга при помощи поворотов и отражений, считаем различными).
- а) Найти наименьшее возможное значение числа n .
- б) Найти наименьшее возможное число красных клеток при этом наименьшем n .