Lahendused

1. Paneme esmalt tähele, et kehtib taandamisreegel $da \ominus db = a \ominus b$. Tõepoolest, mistahes positiivsete täisarvude a, b ja d korral

$$da \ominus db = \frac{da - db}{\text{SÜT}\,(da, db)} = \frac{d \cdot (a-b)}{d \cdot \text{SÜT}\,(a, b)} = \frac{a-b}{\text{SÜT}\,(a, b)} = a \ominus b\,.$$

Näitame nüüd, et kui n on algarvu aste ja $m < n$, siis arv $n \ominus m$ on ühistegurita arvuga n. Tõepoolest, olgu $n = p^k$, kus p on algarv, ja $m = p^i s$, kus $\text{SÜT}\,(p, s) = 1$. Kuna $m < n$, siis $i < k$. Taandamisreegli abil saame

$$n \ominus m = p^{k-i} \ominus s = \frac{p^{k-i} - s}{\text{SÜT}\,(p^{k-i}, s)} = p^{k-i} - s\,,$$

sest kuna $\text{SÜT}\,(p, s) = 1$, siis ka $\text{SÜT}\,(p^{k-i}, s) = 1$. Et samal põhjusel ka $\text{SÜT}\,(p, p^{k-i} - s) = 1$, siis

$$\text{SÜT}\,(n, n \ominus m) = \text{SÜT}\,(p^k, p^{k-i} - s) = 1\,.$$

Jääb üle veenduda, et kui n ei ole algarvu aste, siis leidub selline positiivne täisarv m, et $m < n$ ning arvudel $n \ominus m$ ja n on ühistegur. Kuna n ei ole algarvu aste, siis on tal vähemalt kaks erinevat algtegurit. Olgu p ja q arvu n mingid algtegurid, kusjuures $p < q$. Olgu $n = p^k t$, kus $\text{SÜT}\,(p, t) = 1$. Võtame $m = n - p^{k+1}$. Et n jagub arvudega p^k ja q, mis on ühistegurita, siis ta jagub ka nende korrutisega $p^k q$; järelikult $p^{k+1} < p^k q \leqslant n$, st $0 < m < n$. Nüüd

$$n \ominus m = n \ominus (n - p^{k+1}) = t \ominus (t-p) = \frac{t - (t-p)}{\text{SÜT}\,(t, t-p)} = \frac{p}{\text{SÜT}\,(t, p)} = p\,,$$

sest $\text{SÜT}\,(t, p) = 1$. Näeme, et arvudel $n \ominus m$ ja n on ühistegur $p > 1$.

2. *Vastus:* $\dfrac{3^n - 1}{2}$.

Võimalus tuvastada mass m tähendab võimalust paigutada vihid kaalukaussidele nii, et ühel ja teisel kaalukausil olevate vihtide kogumasside vahe on parajasti m.

Iga kaaluviht saab asuda kas esimesel kaalukausil, teisel kaalukausil või mitte kummalgi. Kokku saame n kaaluvihi jaoks 3^n võimalikku paigutust. Paneme seejuures tähele, et paigutus, kus kaussidel ei asu ükski kaaluviht, ei võimalda tuvastada ühtki vaadeldavat massi. Samuti saame igast paigutusest sümmeetrilise paigutuse (mis võimaldab tuvastada sama massi), kui vahetame ära kõik esimesel kaalukausil olevad vihid teisel kaalukausil olevate vihtidega. Järelikult saab n kaaluvihi abil tuvastatavaid erinevaid masse olla ülimalt $\frac{3^n-1}{2}$.

Näitame nüüd induktsiooniga, et n kaaluvihi abil, mille massid on $1, 3, \ldots, 3^{n-1}$, saame tõepoolest tuvastada kõik massid 1 kuni $\frac{3^n-1}{2}$. Juhul $n=1$ on väide ilmne, sest $\frac{3^1-1}{2}=1$. Eeldame nüüd, et väide kehtib $n=k$ jaoks, ning veendume, et see kehtib siis ka $n=k+1$ jaoks.

Induktsiooni eelduse kohaselt saame massidega $1, 3, \ldots, 3^{k-1}$ kaaluvihtide abil tuvastada kõik massid 1 kuni $\frac{3^k-1}{2}$. Võttes nüüd lisaks kasutusele kaaluvihi massiga 3^k, saame ilmselt tuvastada ka massi 3^k, aga samuti kõik massid

$$3^k+1, \ldots, 3^k+\frac{3^k-1}{2}$$

ning

$$3^k-1, \ldots, 3^k-\frac{3^k-1}{2}.$$

Kuna aga $3^k-\frac{3^k-1}{2}=\frac{3^k-1}{2}+1$ ning $3^k+\frac{3^k-1}{2}=\frac{3^{k+1}-1}{2}$, siis saame nüüd lisaks massidele 1 kuni $\frac{3^k-1}{2}$ tuvastada ka kõik massid $\frac{3^k-1}{2}+1$ kuni $\frac{3^{k+1}-1}{2}$.

3. *Vastus:* võrdus kehtib, kui kolmnurk on võrdkülgne.

Lahendus 1. Olgu nurkade α, β ja γ vastaskülgede pikkused vastavalt a, b ja c.

Et $\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}-1$ ja siinusteoreemist $\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{2R}{a}$, siis $\cot^2\alpha=\frac{4R^2}{a^2}-1$; analoogiliselt ka $\cot^2\beta=\frac{4R^2}{b^2}-1$ ja $\cot^2\gamma=\frac{4R^2}{c^2}-1$. Tõestatav võrratus omandab niisiis kuju

$$4R^2\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-3\geqslant 3\cdot\left(\frac{4\cdot 9R^2}{(a+b+c)^2}-1\right),$$

ehk

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant\frac{27}{(a+b+c)^2}\ .$$

Jagades selle võrratuse pooled 3-ga ja võttes mõlemal pool ruutjuure, saame samaväärse võrratuse

$$\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}\geqslant\frac{3}{(a+b+c)}\ .$$

Siin on vasakul pool arvude $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ ruutkeskmine ja paremal pool samade arvude harmooniline keskmine — järelikult see võrratus kehtib.

Võrdus kehtib siin parajasti siis, kui $a=b=c$, st kolmnurk on võrdkülgne.

Lahendus 2. Samuti nagu eelmises lahenduses olgu a, b ja c vastavalt nurkade α, β ja γ vastaskülgede pikkused. Siinusteoreemist näeme, et kolmnurga nurkade siinused on alati järjestatud samas järjekorras nagu nende nurkade vastaskülgede pikkused, ning siinuste pöördväärtused seega vastupidises järjekorras. Seega saame Tšebõševi võrratust kasutades:

$$18R=3\left(\frac{a}{\sin\alpha}+\frac{b}{\sin\beta}+\frac{c}{\sin\gamma}\right)\leqslant(a+b+c)\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right)\ ,$$

millest järeldub, et

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\geqslant\frac{18R}{a+b+c}=\frac{9R}{p}\ .$$

Selle võrratuse vasakut poolt hindame ülalt aritmeetilise ja ruutkeskmise vahelise võrratuse abil:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}&\leqslant\sqrt{3\cdot\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)}=\\&=\sqrt{3\cdot(3+\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma)}\ .\end{aligned}$$

Saadud tulemusi kombineerides saame, et

$$\sqrt{3\cdot(3+\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma)}\geqslant\frac{9R}{p}\ ,$$

mida ruutu tõstes saame

$$3\cdot(3+\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma)\geqslant\frac{(9R)^2}{p^2}$$

ehk

$$\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geqslant\frac{3\cdot 9R^2}{p^2}-3=3\left(\frac{9R^2}{p^2}-1\right)\ .$$

Võrdus kehtib keskmistevahelises võrratuses, kui $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\gamma}$, ning Tšebõševi võrratuses, kui $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\gamma}$ või $a = b = c$. Kokkuvõttes kehtib võrdus parajasti võrdkülgse kolmnurga korral.

Lahendused

4. Paneme tähele, et $\angle ACE = \angle ECK = 90^\circ$, kuna AE on kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter. Seega piisab näidata, et $\angle ACB = \angle DCK$ (vt joonist 1).

Olgu L sirgete AE ja DK lõikepunkt. Siis

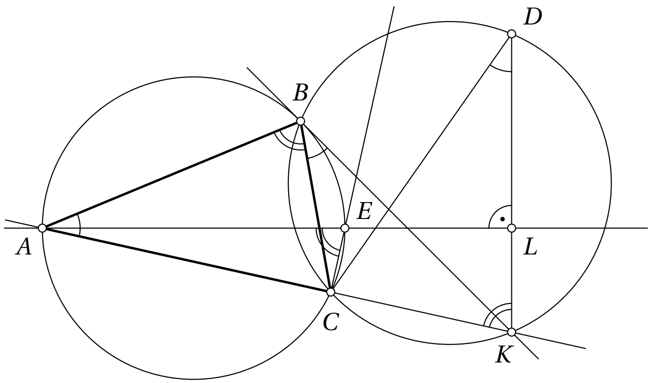
$$\angle BAC = \angle CBK = \angle CDK\,,$$

kus esimene võrdus kehtib vastavalt teoreemile puutujast ja lõikajast ning teine piirdenurkade omaduse põhjal. Samuti

$$\angle ABC = \angle AEC = \angle CKD\,,$$

kus esimene võrdus kehtib piirdenurkade omaduse põhjal ja teine tuleneb täisnurksete kolmnurkade ACE ja ALK sarnasusest.

Niisiis on kolmnurgad ABC ja DKC sarnased, st tõepoolest kehtib võrdus $\angle ACB = \angle DCK$.



Joonis 1

5. Olgu vaadeldava homogeense polünoomi P aste n, st

$$P(x, y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \ldots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n\,,$$

kus $n > 0$. Paneme tähele, et n peab olema paarisarv, sest muidu saame ülesande tingimusest $P(\sin t, \cos t) = 1$ argumendi $t = 0$ korral, et $a_0 = 1$, ning $t = \pi$ korral, et $a_0 = -1$.

Et polünoomil P vabaliige puudub, siis $P(0,0) = 0$. Olgu nüüd x ja y mistahes reaalarvud, millest vähemalt üks ei ole 0, ja võtame $c = \sqrt{x^2 + y^2}$. Kuna

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1\,,$$

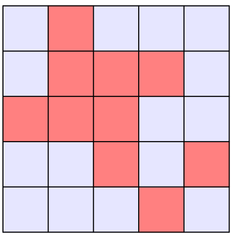
siis leidub selline reaalarv t, et $\sin t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ja $\cos t = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ning vastavalt ülesande tingimusele $P(\sin t, \cos t) = 1$. Et homogeensuse tõttu $P(x, y) = c^n \cdot P\left(\dfrac{x}{c}, \dfrac{y}{c}\right)$, siis saame

$$P(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n \cdot P\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n .$$

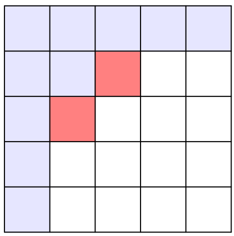
Olgu nüüd $n = 2k$, siis $P(x, y) = (x^2 + y^2)^k$, kusjuures see võrdus kehtib ka $x = y = 0$ korral, kuna $P(0,0) = 0$.

6. *Vastus:* a) 5, b) 10.

a) Et 2×2 alamruudustiku värvimiseks kahe värviga on $2^4 = 16 = 4^2$ võimalust ning $n \times n$ ruudustik sisaldab $(n-1)^2$ sellist alamruudustikku, siis peab olema $n - 1 \geqslant 4$, ehk $n \geqslant 5$. Nõutava omadusega värvimine $n = 5$ jaoks on esitatud joonisel 2.



Joonis 2



Joonis 3

b) Joonisel 2 esitatud värvimine sisaldab 10 punast ruutu — näitame, et see ongi vähim võimalik arv.

Paneme tähele, et 5×5 ruudustikus on 4 nurgaruutu, 12 küljeruutu (mis ei ole nurgaruudud), ning 9 sisemist ruutu. Seejuures iga nurgaruut sisaldub parajasti ühes, küljeruut kahes ja sisemine ruut neljas 2×2 alamruudustikus. Kõik 2×2 alamruudustiku 16 värvimist kokku sisaldavad $16 \cdot 4 = 64$

ruutu, millest sümmeetria tõttu 32 on punased. Seega, kui 5×5 ruudustikus on kokku k punast ruutu ning neist a on nurgaruudud, b küljeruudud ja c sisemised ruudud, siis $a + b + c = k$ ja $a + 2b + 4c = 32$.

Võrrandist $a + 2b + 4c = 32$ saame, et $c \leqslant 8$, ning kui $c = 8$, siis $a = b = 0$. Kui $c = 7$, siis ainus võimalus, kus $k < 10$, on $b = 2$ ja $a = 0$. Kui aga $c \leqslant 6$, siis igal juhul $k = a + b + c \geqslant 10$.

Niisiis piisab näidata, et ei leidu nõutava omadusega värvimist, kus $a = 0$ ja $b \leqslant 2$. Tõepoolest, sellisel juhul on 5×5 ruudustikus vähemalt kaks serva, mis ei sisalda ühtki punast ruutu — üldisust kitsendamata olgu üks neist ruudustiku ülemine serv. Eespool nägime, et $n = 5$ korral peab 2×2 alamruudustiku iga värvimisviis esinema täpselt üks kord. Et 2×2 alamruudustiku 16 värvimise seas on 4 sellist, kus mõlemad ülemised ruudud on sinised, ning ruudustiku kahes ülemises reas paiknevaid 2×2 alamruudustikke on parajasti 4, siis peavad kõik 4 sellist värvimist esinema ruudustiku kahes ülemises reas — sh ka see värvimine, kus kõik ruudud on sinised. Et sama arutlus kehtib ka ruudustiku teise serva kohta, kus ei ole ühtegi punast ruutu, siis peavad need kaks serva kohtuma ühes nurgas ja 2×2 alamruudustik, mille kõik ruudud on sinised, peab asuma selles nurgas. Üldisust kitsendamata olgu see teine serv vasakpoolne, siis joonisel 3 näidatud kaks ruutu peavad olema punased, sest vastasel korral oleks ruudustikus rohkem kui üks 2×2 alamruudustik, mille kõik ruudud on sinised. Nüüd on aga ruudustikus kaks sellist 2×2 alamruudustikku, mille parempoolne alumine ruut on punane ja ülejäänud ruudud sinised. Seega $a = 0$ ja $b \leqslant 2$ jaoks nõutavat värvimist ei leidu ning vähim võimalik punaste ruutude arv on $k = 10$.