IMO'10 Eesti võistkonna valikvõistlus

6.–7. aprill 2010 **Esimene päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Positiivsete täisarvude a, b korral tähistame $a \ominus b = \dfrac{a-b}{\text{SÜT}\,(a, b)}$.

Olgu n positiivne täisarv. Tõesta, et järgmised tingimused on samaväärsed:

(i) $\text{SÜT}\,(n, n \ominus m) = 1$ iga arvust n väiksema positiivse täisarvu m korral;

(ii) $n = p^k$, kus p on mingi algarv ja k mittenegatiivne täisarv.

2. Olgu n fikseeritud positiivne täisarv. Leia suurim täisarv N, mille jaoks leidub selline komplekt n kaaluvihist, mida kasutades on kahe kaalukausiga kangkaalul võimalik täpselt tuvastada kõik massid $1, 2, \ldots, N$ (st tundmatu massiga keha korral kindlaks teha, kas tema mass on üks neist, ja milline nimelt).

3. Kolmnurga nurgad on α, β ja γ, ümbermõõt $2p$ ning ümberringjoone raadius R. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\cot^2 \alpha + \cot^2 \beta + \cot^2 \gamma \geqslant 3\left(\frac{9R^2}{p^2} - 1\right).$$

Millal kehtib võrdus?

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

4. Teravnurkses kolmnurgas ABC on nurk C suurem nurgast A. Olgu AE kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter. Kiir AC ning punktist B kolmnurga ABC ümberringjoonele tõmmatud puutuja lõikuvad punktis K. Sirgele AE punktist K tõmmatud ristsirge lõikab kolmnurga BCK ümberringjoont teist korda punktis D. Tõesta, et CE on nurga BCD poolitaja.

5. Kahe muutuja polünoomi $P(x, y) = a_1 x^{i_1} y^{j_1} + \ldots + a_m x^{i_m} y^{j_m}$ nimetame *homogeenseks*, kui tema kõigil liikmetel on muutujate astendajate summa sama, st $i_1 + j_1 = \ldots = i_m + j_m$.

Olgu $P(x, y)$ selline mittekonstantne reaalarvuliste kordajatega homogeenne polünoom, et iga reaalarvu t korral kehtib võrdus $P(\sin t, \cos t) = 1$. Tõesta, et polünoom P esitub kujul

$$P(x, y) = (x^2 + y^2)^k ,$$

kus k on mingi positiivne täisarv.

6. Ruudustikus suurusega $n \times n$ värvitakse osa ruute punaseks ja ülejäänud siniseks nii, et selle 2×2 alamruudustike seas esinevad kõik võimalikud 2×2 ruudustiku värvimised nende kahe värviga (pöörete ja peegelduste abil üksteisest saadavad värvimised loeme erinevateks).

a) Leia arvu n vähim võimalik väärtus.

b) Leia selle vähima n korral punaste ruutude vähim võimalik arv.