# Отборочный конкурс на ММО'09

21–22 апреля 2009 г. **Первый день**

*Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.*
*Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.*
*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*
*Пользоваться калькулятором не разрешается.*

**1.** Доказать, что при любых попарно различных положительных действительных числах $a$, $b$ и $c$ выполняется неравенство

$$\frac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3} > 8abc.$$

**2.** Назовём конечное множество положительных целых чисел *величественным*, если любые его два элемента взаимно просты, и *красивым*, если среднее арифметическое элементов любого его непустого подмножества – целое число.

а) Доказать, что для любого положительного целого числа $n$ найдётся $n$-элементное множество положительных целых чисел, которое как величественно, так и красиво.

б) Найдётся ли такое бесконечное множество положительных целых чисел, каждое величественное подмножество которого красиво, и у которого для любого положительного целого числа $n$ имеется $n$-элементное величественное подмножество?

*Примечание.* Множество не содержит повторяющихся элементов. Множество $Y$ называют *подмножеством* множества $X$, если каждый элемент множества $Y$ является элементом множества $X$.

**3.** При каких натуральных числах $n$ найдётся выпуклый многогранник, удовлетворяющий всем следующим условиям?

(i) Каждая грань – правильный многоугольник.

(ii) Среди граней присутствуют многоугольники максимально с двумя разными количествами сторон.

(iii) Найдутся две грани с общим ребром, являющиеся обе $n$-угольниками.

# Отборочный конкурс на ММО’09

21–22 апреля 2009 г. **Второй день**

*Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.*
*Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.*
*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*
*Пользоваться калькулятором не разрешается.*

**4.** На сторонах $BC$, $CA$ и $AB$ треугольника $ABC$ выбирают соответственно точки $A'$, $B'$ и $C'$ так, что $\dfrac{|BA'|}{|A'C|} = \dfrac{|CB'|}{|B'A|} = \dfrac{|AC'|}{|C'B|}$. Прямая, проходящая через точку $A'$ и параллельная прямой $B'C'$, пересекает прямые $AC$ и $AB$ соответственно в точках $P$ и $Q$. Доказать, что $\dfrac{|PQ|}{|B'C'|} \geqslant 2$.

**5.** Игровая полоска состоит из $n$ клеток, пронумерованных попорядку номерами $1, 2, 3, \ldots, n$. Вначале одна клетка свободна, на всех остальных клетках находится по одной фишке. В случае, если на какой-то клетке находится фишка, на какой-то её соседней клетке находится другая фишка, а следующая за соседней клетка свободна, то первую фишку можно переместить через вторую на свободную клетку, удаляя вторую фишку при этом с полоски. Найти все возможности, клетка с каким номером может быть в начальной позиции свободна, чтобы такими ходами можно было достичь позиции, где на доске остаётся всего одна фишка, если

а) $n = 2008$;

б) $n = 2009$.

**6.** Пусть $c(n)$ обозначает наибольший множитель положительного целого числа $n$, не превосходящий $\sqrt{n}$, а $s(n)$ – наименьшее из таких целых чисел $x$, при которых $n < x$ и произведение $nx$ делится на какое-то целое число $y$, где $n < y < x$. Доказать, что при любом $n$

$$s(n) = (c(n) + 1) \cdot \left( \frac{n}{c(n)} + 1 \right).$$