

## Отборочный конкурс на ММО'09

21–22 апреля 2009 г.

Первый день

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.

Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Доказать, что при любых попарно различных положительных действительных числах  $a$ ,  $b$  и  $c$  выполняется неравенство

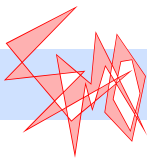
$$\frac{(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3}{(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3} > 8abc.$$

2. Назовём конечное множество положительных целых чисел *величественным*, если любые его два элемента взаимно просты, и *красивым*, если среднее арифметическое элементов любого его непустого подмножества – целое число.

- а) Доказать, что для любого положительного целого числа  $n$  найдётся  $n$ -элементное множество положительных целых чисел, которое как величественно, так и красиво.
- б) Найдётся ли такое бесконечное множество положительных целых чисел, каждое величественное подмножество которого красиво, и у которого для любого положительного целого числа  $n$  имеется  $n$ -элементное величественное подмножество?

*Примечание.* Множество не содержит повторяющихся элементов. Множество  $Y$  называют *подмножеством* множества  $X$ , если каждый элемент множества  $Y$  является элементом множества  $X$ .

3. При каких натуральных числах  $n$  найдётся выпуклый многогранник, удовлетворяющий всем следующим условиям?
- (i) Каждая грань – правильный многоугольник.
- (ii) Среди граней присутствуют многоугольники максимально с двумя разными количествами сторон.
- (iii) Найдутся две грани с общим ребром, являющиеся обе  $n$ -угольниками.



## Отборочный конкурс на ММО'09

21–22 апреля 2009 г.

Второй день

*Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.*

*Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.*

*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*

*Пользоваться калькулятором не разрешается.*

4. На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  выбирают соответственно точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  так, что  $\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{|AC'|}{|C'B|}$ . Прямая, проходящая через точку  $A'$  и параллельная прямой  $B'C'$ , пересекает прямые  $AC$  и  $AB$  соответственно в точках  $P$  и  $Q$ . Доказать, что  $\frac{|PQ|}{|B'C'|} \geq 2$ .
5. Игровая полоска состоит из  $n$  клеток, пронумерованных по порядку номерами  $1, 2, 3, \dots, n$ . Вначале одна клетка свободна, на всех остальных клетках находится по одной фишке. В случае, если на какой-то клетке находится фишка, на какой-то её соседней клетке находится другая фишка, а следующая за соседней клетка свободна, то первую фишку можно переместить через вторую на свободную клетку, удаляя вторую фишку при этом с полоски. Найти все возможности, клетка с каким номером может быть в начальной позиции свободна, чтобы такими ходами можно было достичь позиции, где на доске остаётся всего одна фишка, если
- $n = 2008$ ;
  - $n = 2009$ .
6. Пусть  $c(n)$  обозначает наибольший множитель положительного целого числа  $n$ , не превосходящий  $\sqrt{n}$ , а  $s(n)$  – наименьшее из таких целых чисел  $x$ , при которых  $n < x$  и произведение  $nx$  делится на какое-то целое число  $y$ , где  $n < y < x$ . Доказать, что при любом  $n$

$$s(n) = (c(n) + 1) \cdot \left( \frac{n}{c(n)} + 1 \right).$$