Lahendused

1. Tähistame $a - b = x$ ja $b - c = y$, siis $c - a = -(x + y)$. Vasaku poole nimetaja teisendamisel saame, et

$$\begin{aligned}(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 &= x^3 + y^3 - (x+y)^3 = \\ &= -3x^2y - 3xy^2 = \\ &= -3xy(x+y) = \\ &= 3(a-b)(b-c)(c-a).\end{aligned}$$

Analoogiliselt lugejas

$$(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3 = 3(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2).$$

Seega

$$\begin{aligned}\frac{(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3}{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3} &= \frac{3(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{3(a-b)(b-c)(c-a)} = \\ &= (a+b)(b+c)(c+a).\end{aligned}$$

Niisiis jääb tõestada võrratus $(a + b)(b + c)(c + a) > 8abc$. Et a, b, c seas pole võrdseid, siis

$$a + b > 2\sqrt{ab}, \qquad b + c > 2\sqrt{bc}, \qquad c + a > 2\sqrt{ca}.$$

Korrutades nende seoste vastavad pooled, saamegi

$$(a + b)(b + c)(c + a) > 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc.$$

Märkus. Võrratust $(a + b)(b + c)(c + a) > 8abc$ saab tõestada ka näiteks nii, et avada vasakul kõik sulud ning kasutada saadava võrratuse $a^2b + ab^2 + abc + b^2c + bc^2 + abc + ac^2 + a^2c > 8abc$ tõestamiseks aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust kaheksa arvu jaoks, või pannes tähele, et viimane võrratus on samaväärne võrratusega $(a - b)^2c + (b - c)^2a + (c - a)^2b > 0$.

Lähtevõrratuse vasaku poole lugeja ja nimetaja tegurdamiseks on samuti mitmeid võtteid. Üks lähenemine on avada kõik sulud, kasutades vahe kuubi valemit, ja koondada sarnased liikmed. Tekkiva murru $\dfrac{-a^4b^2+a^2b^4-b^4c^2+b^2c^4-a^2c^4+a^4c^2}{-a^2b+ab^2-b^2c+bc^2-ac^2+a^2c}$ lugeja ja nimetaja tegurdamine on juba küllaltki hõlbus.

Näiteks nimetaja tegurdamiseks võib aga hoopis vaadelda polünoomi $P(x)=(x-b)^3+(b-c)^3+(c-x)^3$. Selle polünoomi nullkohad on $x=b$ ja $x=c$ ning kuna ta on ülimalt kolmanda astme polünoom, võime kirjutada, et $P(x)=(x-b)(x-c)(mx+n)$, kus m ja n on teatud reaalarvud. Arv m on polünoomi P kuupliikme kordaja, mis P algse kuju põhjal tuleb 0. Niisiis $P(x)=n(x-b)(x-c)$, kusjuures n on P ruutliikme kordaja, mille leiame olevat $3(c-b)$. Kokkuvõttes $P(x)=3(c-b)(x-b)(x-c)$, millest $x=a$ korral saame nimetajale soovitud kuju $3(c-b)(a-b)(a-c)$.

2. *Vastus.* b) ei.

Lahendus 1. a) Olgu $A=\{n!+1, 2\cdot n!+1, \ldots, n\cdot n!+1\}$, kus kirjutis $k!$ tähistab korrutist $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k$ (arvu k *faktoriaal*).

Mistahes kahe elemendi $k\cdot n!+1$ ja $l\cdot n!+1$, kus $1\leqslant k<l\leqslant n$, korral

$$\begin{aligned}\text{SÜT}(k\cdot n!+1, l\cdot n!+1) &= \text{SÜT}(k\cdot n!+1, (l\cdot n!+1)-(k\cdot n!+1)) =\\ &= \text{SÜT}(k\cdot n!+1, (l-k)n!).\end{aligned}$$

Arv $k\cdot n!+1$ ei jagu ühegagi arvudest $1,2,\ldots,n$, seega ka ühegagi nende arvude algteguritest; arv $(l-k)n!$ aga sisaldabki ainult arvude $1,2,\ldots,n$ algtegureid. Niisiis $\text{SÜT}(k\cdot n!+1, l\cdot n!+1)=1$, mis tähendab, et hulk A on ülev.

Valime hulgast A mingid m elementi $k_1\cdot n!+1$, $k_2\cdot n!+1$, …, $k_m\cdot n!+1$, kus $1\leqslant m\leqslant n$ ning iga $i=1,2,\ldots,m$ korral $1\leqslant k_i\leqslant n$. Me saame, et

$$\begin{aligned}&(k_1\cdot n!+1)+(k_2\cdot n!+1)+\ldots+(k_m\cdot n!+1)=\\ &\quad=(k_1+k_2+\ldots+k_m)n!+m=\\ &\quad=m\cdot\left((k_1+k_2+\ldots+k_m)\cdot\frac{n!}{m}+1\right).\end{aligned}$$

Et $\dfrac{n!}{m}$ on täisarv, siis valitud m elemendi summa jagub m-ga, mistõttu aritmeetiline keskmine on täisarv. Niisiis hulk A on kena.

b) Paneme tähele, et iga n-elemendilise kena hulga mistahes kahe elemendi vahe jagub iga n-st väiksema positiivse täisarvuga.

Põhjendame selle tähelepaneku. Olgu X n-elemendiline kena hulk. Olgu fikseeritud täisarv i $(2\leqslant i\leqslant n-1)$, ning valime suvaliselt elemendid

$a, b \in X$. Valides hulgast X mingid elementidest a ja b erinevad $i-1$ elementi ning tähistades nende summa tähega s, saame kena hulga tingimuse kohaselt, et $a+s$ ja $b+s$ jaguvad mõlemad arvuga i. Niisiis peab arvuga i jaguma ka nende vahe $a-b$.

Oletame nüüd, et leidub selline lõpmatu positiivsete täisarvude hulk B, et iga positiivse täisarvu n korral leidub hulga B n-elemendiline ülev alamhulk ning hulga B iga ülev alamhulk on kena. Olgu a ja b mingid kaks ühistegurita elementi hulgast B. (Selliste elementide leidumine järeldub hulga B tingimusest, kui seal valida $n=2$.)

Näitame, et leidub B kuitahes suuri ülevaid alamhulki, mis sisaldavad arvusid a ja b. Konstrueerime sellise m-elemendilise üleva alamhulga. Olgu algarve, millega kas a või b jagub, kokku k erinevat. Vastavalt hulga B tingimusele, kui seal valida n rolli $m+k-2$, leidub $m+k-2$ paarikaupa ühistegurita hulga B elementi. Neist ülimalt k elementi saavad omada arvuga a või b ühistegurit ning vähemalt $m-2$ on seega arvudega a ja b ühistegurita. Alamhulk, mis sisaldab a, b ja need $m-2$ elementi, ongi otsitav ülev alamhulk. Hulga B tingimuse põhjal on see alamhulk kena.

Lahenduse alguses tehtud tähelepaneku põhjal jagub vahe $a-b$ iga m-st väiksema arvuga. Kuna m saab olla kuitahes suur, siis peab $a-b$ jaguma iga positiivse täisarvuga, mis pole võimalik. Järelikult niisugust hulka B ei leidu.

Lahendus 2. a) Olgu $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, kus $a_0=n$ ning $a_k=a_{k-1}!+1$ iga $k=1,2,\ldots,n$ korral. Siis $n<a_1<\ldots<a_n$.

Hulk A on ülev, kuna iga $k=1,2,\ldots,n$ korral a_k annab jäägi 1 jagamisel mistahes sellise arvuga, mis pole suurem kui a_{k-1}, mistõttu arvu a_k kõik algtegurid on suuremad kui a_{k-1}.

Näitame, et hulk A on kena. Valime hulgast A mingid m elementi a_{k_1}, a_{k_2}, $\ldots$, a_{k_m}, kus $1 \leqslant m \leqslant n$ ning iga $i=1,2,\ldots,m$ korral $1 \leqslant k_i \leqslant n$. Siis

$$\begin{aligned} a_{k_1}+a_{k_2}+\ldots+a_{k_m} &= a_{k_1-1}!+1+a_{k_2-1}!+1+\ldots+a_{k_m-1}!+1= \\ &= \left(a_{k_1-1}!+a_{k_2-1}!+\ldots+a_{k_m-1}!\right)+m. \end{aligned}$$

Hulga A kenadus järeldub nüüd sellest, et iga $k=0,1,\ldots,n-1$ korral arv $a_k!$ jagub arvuga $n!$, seega ka arvuga m.

b) Oletame, et leidub selline lõpmatu positiivsete täisarvude hulk B, et iga positiivse täisarvu n korral leidub hulga B n-elemendiline ülev alamhulk ning hulga B iga ülev alamhulk on kena.

Olgu C hulga B suvaline ülev alamhulk, ja näitame, et hulgale C saab lisada B mingi elemendi, nii et ka tekkiv suurem hulk on ülev. Selleks oletame väitevastaselt, et ükski B element väljaspool C-d pole kõigi C-sse kuuluvate arvudega ühistegurita. Olgu $p_1, \ldots, p_k$ parajasti kõik need algarvud, mis on mõne C-sse kuuluva arvu algteguriks. Siis iga 1-st suurem C element jagub mõnega algarvudest $p_1, \ldots, p_k$ ning vastavalt oletusele ka iga B element väljaspool C-d jagub mõnega algarvudest $p_1, \ldots, p_k$. Siis kõigi 1-st suuremate B elementide seast saame korraga valida ülimalt k sellist, mis on paarikaupa ühistegurita (sest kui neid valida rohkem, siis nende seas oleks kaks, mis jaguksid sama algarvuga ega oleks ühistegurita). Seega oleks võimalik ülimalt $k+1$-elemendiline ülev alamhulk, mis on vastuolus B tingimusega.

Et C oli valitud suvaliselt, siis näitab saadud vahetulemus, et B igale ülevale alamhulgale saab piiramatult lisada B elemente juurde nii, et tekivad ülevad hulgad. Alustades mingist 2-elemendilisest ülevast hulgast elementidega a ja b, saame kuitahes suure üleva alamhulga, mis sisaldab just need elemendid. Kõik need hulgad on B tingimuse põhjal kenad. Lahenduse 1 alguses tehtud tähelepanekut kasutades saame nüüd, et arv $a - b$ jagub kuitahes suure arvuga, mis on võimatu. Järelikult hulka B ei leidu.

Lahendus 3. a) Kasutame *Dirichlet' teoreemi*: mistahes kahe ühistegurita positiivse täisarvu a ja d korral leidub lõpmata palju algarve kujul $a + kd$, kus $k \geqslant 0$. Valides Dirichlet' teoreemis $a = 1$ ja $d = n!$, saame, et leidub lõpmata palju algarve, mis on kujul $kn! + 1$, kus $k \geqslant 0$. Nende seast mingi n arvu valimisel saadav hulk A on ilmselt ülev. Hulga A kenaduse saame põhjendada analoogiliselt lahenduse 1 a)-osaga.

b) Oletame, et leidub selline lõpmatu positiivsete täisarvude hulk B, et iga positiivse täisarvu n korral leidub hulga B n-elemendiline ülev alamhulk ning hulga B iga ülev alamhulk on kena. Olgu a hulga B suvaline element.

Olgu C hulga B suvaline ülev alamhulk, milles on rohkem kui a elementi; B tingimuse kohaselt on C ka kena. Lahenduse 1 alguses tehtud tähelepaneku kohaselt jagub hulga C mistahes kahe elemendi vahe arvuga a, st C elemendid on kõik mooduli a järgi kongruentsed. Seega kõigil C elementidel on arvuga a sama suurim ühistegur. Hulga C ülevuse põhjal peab see olema 1.

Saime, et iga a-st suurema elementide arvuga üleva hulga kõik elemendid on a-ga ühistegurita. Seega lisades mistahes sellisele hulgale elemendi a (kui ta seal juba ei olnud), saame üleva hulga, milles on rohkem kui a elementi ja mille üks element on a. Järelikult ka a on a-ga ühistegurita, kust $a = 1$.

Kuna a oli valitud hulgast B suvaliselt, oleme saanud, et $B = \{1\}$, mis on võimatu. Järelikult niisugust hulka B ei leidu.

Märkus. Lahenduse 3 a)-osas kasutatud Dirichlet' teoreem ja diskreetses matemaatikas tuntud *Dirichlet' printsiip* (asetades n pesasse vähemalt $kn + 1$ objekti, leidub pesa, milles asub vähemalt $k + 1$ objekti) on täiesti erinevad tulemused. Tähelepanelik lugeja märkab, et lahenduste 1 ja 2 b)-osas on Dirichlet' printsiip kasutusel. Kuigi Dirichlet' teoreemi väide on lihtsasti mõistetav, on selle tõestus mitu lehekülge pikk, kasutades muuhulgas kompleksarve ja arvridade teooriat.

3. *Vastus.* 3, 4, 5, 6, 8, 10.

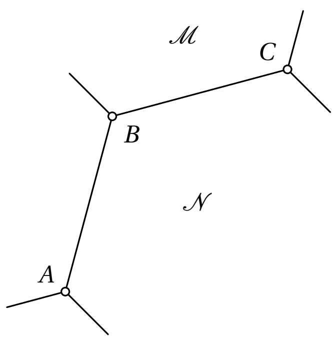
Tõestame, et n rahuldab nõutud tingimusi parajasti siis, kui n on 3, 4, 5, 6, 8 või 10.

Piisavus. Korrapärase tetraeedri kõik tahud on 3-nurgad, kuubi kõik tahud on 4-nurgad ning korrapärase dodekaeedri kõik tahud on 5-nurgad. Seega 3, 4, 5 sobivad. Eemaldades vastavalt korrapärasel tetraeedril, kuubil ja korrapärasel dodekaeedril iga tipu ümbrusest tasapinnalise lõikega kindlalt kauguselt a korrapärase püramiidi, jäävad mainitud kujundite tahkudest järele vastavalt 6-nurgad, 8-nurgad ja 10-nurgad. Seejuures iga sellise tahu kõik sisenurgad on ühesuurused. Ilmselt on võimalik a valida nii, et ka kõik küljed oleksid ühepikkused, st kõik need tahud oleksid korrapärased. Mahalõigatud tippude asemele tekivad korrapärased 3-nurgad. Seega ka 6, 8, 10 rahuldavad tingimusi.

Tarvilikkus. Olgu meil antud kumer hulktahukas, mille kõik tahud on korrapärased hulknurgad, mida on ülimalt kaht sorti ja millest kaks n-nurka on naabrid.

Vaatame kaht n-nurka eraldava serva AB ükskõik kumba otspunkti (joonis 1). Kuulugu see tipp peale nende n-nurkade veel k tahule. Teame, et korrapärase n-nurga sisenurga suurus on $\frac{(n-2)}{n}\pi$; et ühe tipu juures kohtuvate tahkude sisenurga suuruste summa on tahuka kumeruse tõttu väiksem kui 2π, iga tahu kui korrapärase hulknurga sisenurga suurus on aga vähemalt $\frac{1}{3}\pi$, siis saame

$$2\pi > 2 \cdot \frac{(n-2)}{n}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi. \tag{1}$$



Joonis 1

Tingimus (1) annab lihtsustades $2 > 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{k}{3}$ ja edasi $\frac{4}{n} > \frac{k}{3}$, kust

$$n \cdot k < 12. \tag{2}$$

Seega $n < 12$. Eesmärgi täitmiseks jääb veel välistada juhud $n = 7$, $n = 9$, $n = 11$. Oletame väitevastaselt, et n on paaritu ja $6 < n < 12$; siis võrratusest (2) $k = 1$, järelikult nii tippu A kui tippu B tuleb peale n-nurkade vaid üks tahk.

Olgu m tippude arv sellel tahul, mis kohtub vaadeldava kahe n-nurgaga tipus A. Ilmselt nurk n-nurga servade vahel tipus B on niisama suur kui tipus A ehk suurusega $\frac{(m-2)\pi}{m}$. Seega tipus B kohtuvad n-nurgad samuti mingi m-nurgaga $\mathscr{M}$. Olgu $\mathscr{N}$ üks n-nurkadest ning olgu C tahkude $\mathscr{M}$ ja $\mathscr{N}$ vahelise serva teine otspunkt. Olgu γ kõigi tipus C kohtuvate $\mathscr{M}$-st ja $\mathscr{N}$-st erinevate hulknurkade sisenurga suuruste summa. Saame võrratused

$$\pi > \frac{20}{21}\pi = 2\pi - \frac{1}{3}\pi - \frac{5}{7}\pi \geqslant 2\pi - \frac{(m-2)}{m}\pi - \frac{(n-2)}{n}\pi > \gamma \geqslant \frac{(n-2)}{n}\pi \geqslant \frac{5}{7}\pi.$$

Hinnangust $\pi > \gamma$ järeldub, et tippu C tuleb lisaks tahkudele $\mathscr{M}$ ja $\mathscr{N}$ veel ülimalt 2 tahku. Kui neid lisatahke oleks 2, oleks neil kummalgi ülimalt 5 tippu; järelikult oleks neil kummalgi vähem kui n tippu, mistõttu oleks neil ühesugune arv tippe. Sellest aga tuleneb sama hinnangu abil, et mõlemad lisatahud peaksid olema 3-nurgad, mis annaks vastuolu hinnanguga $\gamma \geqslant \frac{5\pi}{7}$. Järelikult tuleb tippu C vaid üks lisatahk, mis ilmselt peab olema n-nurk.

Jätkates toodud arutlust, leiame, et tahu $\mathscr{N}$ naabertahkudeks on vaheldumisi n-nurgad ja m-nurgad. Kuna n on paaritu, siis $n = m$. Seega tipus A kohtub kolm n-nurka, millest järeldub $n < 6$. Saime vastuolu, millega ülesanne on ka lahendatud.

Märkus 1. Tingimus (iii) on ülesandes tarvilik. Selle puudumisel leiduks suvalise n korral nõutav hulktahukas: püstprisma, mille alusteks on korrapärased n-nurgad ning külgtahkudeks ruudud.

Märkus 2. Üheks näiteks $n = 6$ jaoks on 12 viisnurgaga ja 20 kuusnurgaga „futboloid”, mis oli vaatluse all 2004. aasta IMO-valikvõistluse ülesandes 6. „Futboloidi” võib saada, kui rakendada tarvilikkuse osa konstruktsiooni korrapärase ikosaeedri jaoks.

Lahendused

4. *Lahendus 1.* Tähistame $\dfrac{|BA'|}{|A'C|} = \dfrac{|CB'|}{|B'A|} = \dfrac{|AC'|}{|C'B|} = k$.

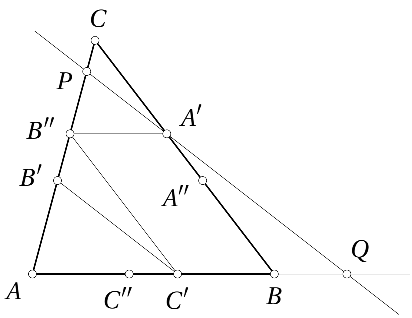
Kui $k = 1$, siis $B'C'$ on kolmnurga ABC küljega BC paralleelne kesklõik. Seega sirged PQ ja BC langevad kokku, kusjuures $P = C$ ja $Q = B$. Järelikult $\dfrac{|PQ|}{|B'C'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|} = 2$.

Eeldame nüüd, et $k \neq 1$ (joonis 2). Olgu B'' selline punkt küljel AC, et $\dfrac{|AB''|}{|B''C|} = k$ (teisisõnu, B'' on B' peegeldus külje AC keskristsirgest). Kiirteteoreemi põhjal $B''C' \parallel BC$ ja $A'B'' \parallel AB$. Seega $BC'B''A'$ on rööpkülik; samuti $\triangle PA'C \sim \triangle B'C'B''$ vastavate külgede samasihilisuse tõttu (kolmnurgad on olemas, sest $k \neq 1$). Järelikult

$$\frac{|A'P|}{|B'C'|} = \frac{|A'C|}{|C'B''|} = \frac{|A'C|}{|BA'|} = \frac{1}{k}.$$

Olgu nüüd C'' selline punkt küljel AB, et $\dfrac{|BC''|}{|C''A|} = k$. Vahetades eelnenud arutluses ära B ja C omavahel, B' ja C' omavahel, B'' ja C'' omavahel ning P ja Q omavahel, saame analoogiliselt

$$\frac{|A'Q|}{|B'C'|} = \frac{|A'B|}{|CA'|} = k.$$



Joonis 2

Järelikult

$$\frac{|PQ|}{|B'C'|} = \frac{|A'P| + |A'Q|}{|B'C'|} = \frac{1}{k} + k > 2.$$

Lahendus 2. Kiirteteoreemist

$$\frac{|PQ|}{|B'C'|} = \frac{|PA|}{|AB'|} = \frac{|PB'| + |AB'|}{|AB'|} = \frac{|PB'|}{|AB'|} + 1.$$

Tähistagu $d(X, l)$ punkti X kaugust sirgest l ning S_Δ kolmnurga Δ pindala. Vaadeldes sirgega $B'C'$ ristuvaid sirgeid, mis läbivad üks punkti P, teine punkti A (joonis 3), saame

$$\frac{|PB'|}{|AB'|} = \frac{d(P, B'C')}{d(A, B'C')} = \frac{d(A', B'C')}{d(A, B'C')} = \frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle AB'C'}}.$$

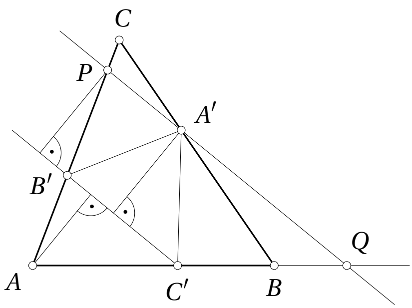
Seega

$$\frac{|PQ|}{|B'C'|} \geqslant 2 \iff \frac{|PB'|}{|AB'|} \geqslant 1 \iff \frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle AB'C'}} \geqslant 1 \iff S_{\triangle A'B'C'} \geqslant S_{\triangle AB'C'}.$$

Näitame, et tõepoolest $S_{\triangle A'B'C'} \geqslant S_{\triangle AB'C'}$. Kuna $\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{|AC'|}{|C'B|}$, siis ka $\frac{|BA'|}{|BC|} = \frac{|CB'|}{|CA|} = \frac{|AC'|}{|AB|} = x$, kus $0 < x < 1$. Saame

$$\begin{aligned} S_{\triangle AB'C'} &= \frac{1}{2} \cdot |AC'| \cdot d(B', AB) = \frac{1}{2} \cdot (x \cdot |AB|) \cdot ((1-x) \cdot d(C, AB)) \\ &= x(1-x) \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d(C, AB) = x(1-x) \cdot S_{\triangle ABC}. \end{aligned}$$

Et aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest $x(1-x) \leqslant$ $\leqslant \left(\frac{x + (1-x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, siis $S_{\triangle AB'C'} \leqslant \frac{1}{4} \cdot S_{\triangle ABC}$. Analoogiliselt $S_{\triangle A'BC'} \leqslant$



Joonis 3

$\leqslant \frac{1}{4} \cdot S_{\triangle ABC}$ ja $S_{\triangle A'B'C} \leqslant \frac{1}{4} \cdot S_{\triangle ABC}$. Kokkuvõttes

$$\begin{aligned} S_{\triangle A'B'C'} &= S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle AB'C'} + S_{\triangle A'BC'} + S_{\triangle A'B'C}) \\ &\geqslant S_{\triangle ABC} - \frac{3}{4} \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} \cdot S_{\triangle ABC} \geqslant S_{\triangle AB'C'}. \end{aligned}$$

Lahendus 3. Kuna $\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{|AC'|}{|C'B|}$, siis ka $\frac{|BA'|}{|BC|} = \frac{|CB'|}{|CA|} = \frac{|AC'|}{|AB|}$, olgu see suhe x. Siis

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC'} &= x \cdot \overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AB'} = (1-x) \cdot \overrightarrow{AC}, \\ \overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB} + x \cdot \overrightarrow{BC} = \\ &= \overrightarrow{AB} + x \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1-x) \cdot \overrightarrow{AB} + x \cdot \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Olgu $\frac{|PQ|}{|B'C'|} = v$; on vaja näidata, et $v \geqslant 2$. Et $PQ \parallel B'C'$, siis $\frac{|AP|}{|AB'|} = \frac{|AQ|}{|AC'|} = v$. Järelikult

$$\overrightarrow{AP} = v \cdot \overrightarrow{AB'} = v \cdot (1-x) \cdot \overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{AQ} = v \cdot \overrightarrow{AC'} = v \cdot x \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Kuna P, A', Q asuvad ühel sirgel, siis $\overrightarrow{PA'} = z \cdot \overrightarrow{PQ}$ ehk

$$\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AP} = z \cdot (\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}).$$

Asendades $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ eelnevalt leitud kujudega, saame

$$(1-x) \cdot \overrightarrow{AB} + x \cdot \overrightarrow{AC} - v \cdot (1-x) \cdot \overrightarrow{AC} = z \cdot v \cdot x \cdot \overrightarrow{AB} - z \cdot v \cdot (1-x) \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Et $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ pole samasihilised, siis võrduse kehtimiseks peavad kummalgi pool nende kordajad olema võrdsed. Saame süsteemi

$$\begin{cases} 1 - x = zvx, \\ x - v(1-x) = -zv(1-x). \end{cases}$$

Esimesest seosest saame $zv = \frac{1-x}{x}$, kust teise seosesse asendades saame $x - v(1-x) = -\frac{1-x}{x} \cdot (1-x)$. Siit

$$v = \frac{\frac{(1-x)^2}{x} + x}{1-x} = \frac{(1-x)^2 + x^2}{(1-x)x}. \tag{3}$$

Et $(1-x)^2 + x^2 \geqslant 2(1-x)x$, siis seos (3) annabki vajaliku $v \geqslant 2$.

5. *Vastus.* a) $2,\ 5,\ 2004,\ 2007$; b) ei leidu.

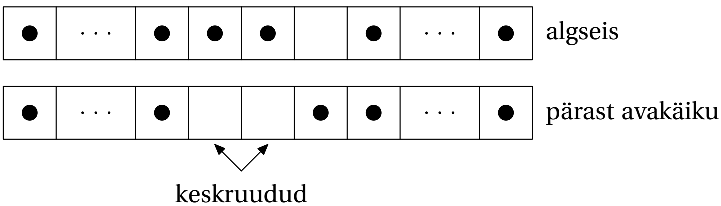
Lahendus 1. Tõlgendame käiku nii, et laualt eemaldatakse nupp vabast ruudust kahe ruudu kaugusel ning vabale ruudule nihkub nupp vahepealselt ruudult. Järgnevas arutluses eeldame, et $n \geqslant 5$.

Näitame, et sellise tõlgenduse korral ei muutu ühegi nupu asukoht, niikaua kui ta on laual, rohkem kui ühe ruudu võrra. Selleks näitame, et kui nupp on mingis suunas sammu liikunud, siis sealt ta samas suunas sammu edasi ei tee. Teeme induktsiooni ruutude arvu järgi, mis lahutab nuppu riba sellest otsast, millest ta vaadeldaval sammul eemaldus – eeldame, et väiksema kauguse puhul sellest otsast väide kehtib. On selge, et pärast käiku on kaks võimalust: kas vaadeldava nupu ja otsa vahele ei jää ühtki nuppu või käigu teinud nupule lähimat selliste nuppude seas lahutab temast kaks vaba ruutu. Kuid selleks, et samas suunas edasi liikuda, peaks otsa pool naaberruudul olema nupp. Induktsiooni eelduse kohaselt aga ei liigu otsa pool olevad nupud rohkem kui ühe ruudu võrra lähemale (või otsa pool polegi nuppe), mistõttu ka vaadeldav nupp ei saa edasi liikuda.

Märkame, et alati, kui jaotada nupud kahte mittetühja gruppi, siis soovitud lõppseisu saamiseks peab tekkima olukord, kus erinevate gruppide nupud on kõrvuti – muidu ei saaks teha käiku, mis kaotab ühe grupi viimase nupu. Seega kui seisus on kolm järjestikust vaba ruutu, millest mõlemale poole jääb nuppe, siis pole nõutud lõppseisu saavutamine võimalik, sest vastavalt ülaltõestatule ei liigu vasaku ja parema poole nupud üksteise poole rohkem kui ühe ruudu võrra, st üks ruut jääb alati nende vahel vabaks. Analoogiliselt kui seisus on üksik nupp, mida lähimast nupust lahutab vähemalt kaks vaba ruutu, siis pole nõutud lõppseisu saavutamine võimalik, kuna teised nupud üksiku nupu külje alla ei jõua ning ta ise ka ei liigu.

Sõltumata vaba ruudu asukohast tekib mängu esimese käigu järel seis, kus kaks järjestikust ruutu on vabad ja kõigil ülejäänud ruutudel on nupp. Nimetame neid kaht ruutu *keskruutudeks* (joonis 4). Näitame, et sellest seisust on võimalik nõutud lõppseisu jõuda parajasti siis, kui ühel pool keskruute on 2 nuppu ja teisel pool paarisarv nuppe.

Oletame, et see tingimus on täidetud; üldisust kitsendamata olgu vasakul pool 2 ja paremal $2k$ nuppu. Näitame induktsiooniga k järgi, et nõutud



Joonis 4

lõppseis on võimalik saavutada. Kui $k = 0$, siis on laual vaid 2 nuppu järjestikustel ruutudel, mistõttu üks käik viib kohe sihile. Kui $k > 0$, siis käime nupuga ruudult 2 paremale ja nupuga ruudult 5 vasakule. Tekkinud seisus on nupud ruutudel 3 ja 4, millele järgneb kaks vaba ruutu ning $2(k-1)$ nuppu paremas otsas. Induktsiooni eelduse põhjal (see on täidetud riba jaoks, mis algab ruudust 3) on võimalik siit jõuda soovitud lõppseisu.

Olgu nüüd mõlemal pool keskruute rohkem kui 2 nuppu. Nõutud lõppseisu tekkimiseks peaks vasaku ja parema poole nupud sattuma kõrvuti. See on võimalik ainult nii, et vasaku poole parempoolseim liigub ühe koha võrra paremale ja parema poole vasakpoolseim ühe koha võrra vasakule. Järgmised nupud mõlemas pooles nende käikudega lüüakse ning ülejäänud ei liigu rohkem kui ühe sammu võrra lähemale. Seega keskruutude ümber kummalegi poole jääb vaba ruut, kuhu ülejäänud nupud ei ulatu. Järelikult kui liigub üks keskruudu nupp, millega ühtlasi teine lüüakse, jäävad vabaks keskruudud ja üks naaberruut, kusjuures mõlemale poole neid kolme ruutu jääb nuppe. Nagu ülal näidatud, ei saa siit jõuda lõppseisu.

Ka kui ühel pool keskruute on 1 nupp, siis pole nõutud lõppseis võimalik. Kui ühel pool on 0 nuppu, siis pärast esimest käiku tekib üksik nupp, järelikult ka siin pole nõutud lõppseis võimalik. Jääb veel uurida juhtu, kus ühel pool – üldisust kitsendamata vasakul – on 2 ja teisel pool paaritu arv $2k+1$ nuppu. Näitame induktsiooniga k järgi, et nõutud lõppseis pole võimalik, isegi kui ribal oleks vasakul pool ruutu 1 veel vabu ruute. Kui $k = 0$, siis kumbki mõeldav käik (ruudult 2 paremale ja ruudult 1 vasakule) viib kahe nupuga tupikseisu. Olgu $k > 0$. Käik ruudult 1 vasakule annab seisu, kus kolm järjestikust ruutu on vabad, seega sihile ei vii. Jäävad üle käigud 2-lt paremale ja 5-lt vasakule, mis mõlemad mängu käigus kindlasti tehakse. Oletame üldisust kitsendamata, et esimene käik on 2-lt paremale, sest käigud enne seda puudutavad vaid nuppe parempoolses osas ja nad saab samamoodi sooritada ka olukorras, kus käik 2-lt paremale on tehtud. Seega peale kaht käiku on laual seis, kus ruutudel 3 ja 4 on nupud, siis kaks vaba ruutu ning $2(k-1)+1$ nuppu parempoolses otsas. Induktsiooni eelduse kohaselt pole siit võimalik saavutada nõutud lõppseisu.

Sellega on kõik avakäigujärgsed seisud analüüsitud. Saame, et nõutud lõppseis on võimalik vaid paaris n korral, kuna vaid siis saab ühel pool kaht vaba ruutu olla 2 nuppu ja teisel pool paarisarv nuppe. Paaris n korral näeme, et seis, kus vabad on parajasti ruudud 3 ja 4, saab tekkida, kui alguses on vaba kas 2 või 5. Analoogiliselt käsitleme sümmeetrilise juhu. Seega $n = 2008$ korral saavad alguses vabad olla ruudud 2, 5, 2004, 2007.

Lahendus 2. Värvime riba ruudud vaheldumisi mustaks ja valgeks. Tõlgendades käiku nagu ülesande tekstis, liigub iga nupp ribal ainult üht värvi ruutudel. Järgnevas arutluses eeldame, et $n \geqslant 5$.

Pärast avakäiku on kaks järjestikust ruutu vabad – nagu lahenduses 1, nimetame neid keskruutudeks – ja kõigil ülejäänud ruutudel on nupp.

Näitame induktsiooniga mängu algusest möödunud käikude arvu järgi, et valgetel ruutudel olevad nupud saavad kogu avakäigule järgneva mängu jooksul käia ainult ühes suunas ja mustadel ruutudel olevad nupud vastassuunas. Selleks eeldame, et mingil hetkel see kehtib, ja näitame, et ka pärast järjekordset käiku säilib kumbagi värvi nuppude võimalik liikumissuund. Vaatame läbi kõik uued käiguvõimalused, mida viimane käik tekitab võrreldes eelnenud seisuga.

- Kui viimatikäinud nupp saab veel käia, siis toimuks see käik sama värvi ruutudel samas suunas (tagasi käia ei saa, sest nupp on vahelt löödud).
- Kui mingi nupp saab käia ruudule, millelt viimasel käigul nupp ära käis, siis toimuks see käik viimasega sama värvi ruutudel samas suunas (vastassuunas käiks viimatikäinud nupp tagasi, mis pole võimalik).
- Kui mingi nupp saab käia ruudule, millelt viimasel käigul nupp löödi, siis toimuks see käik viimasega vastasvärvi ruutudel vastassuunas (samas suunas ei saa, sest hüpe toimuks üle vaba ruudu).

Seega pärast avakäiku toimuvad kõik käigud valgetel ruutudel ühes ja mustadel ruutudel vastassuunas.

Kui mingil pool keskruute on paaritu arv nuppe, siis otsmine ruut on sama värvi keskruudu naaberruuduga. Kuna keskruutude poolt lugedes teine nupp, mis järelikult on vastasvärvi ruudul, saab käia keskruutude poole, siis nupp otsmisel ruudul saaks käia ainult keskruutudest eemale ehk ribalt välja, mis ka pole võimalik. Kuid nuppu otsmisel ruudul ei saa ka lüüa. Seega jääb see nupp peale. Et peale jääb ka nupp, mis teeb viimase käigu, siis pole nõutud lõppseisu võimalik saada.

Vaatame edasi juhtu, kus mõlemal pool keskruute on paarisarv nuppe, seega ka n on paaris. Üldisust kitsendamata eeldame, et vasak otsaruut on valge. Värvime vasakul pool keskruute olevad nupud valgeks ja ülejäänud mustaks. Eeldame, et meil on käikude jada, mis viib nõutud lõppseisu.

Keskruutudest lugedes teine nupp asub oma värvi ruudul ja saab käia keskruutude suunas. Oletame, et mängu jooksul teeb käigu mingi nupp, mis asub mitte oma värvi ruudul. Vastavalt suunaseaduspärale saaks ta liikuda vaid keskruutudest eemale. Kuid esimene selline käik läheks kas ribalt välja või veel liikumata nupule otsa, mis pole võimalik. Järelikult käia saavadki ainult nupud, mis on oma värvi ruutudel, ning teised nupud lüüakse oma algpositsioonil. Kui aga mingi nupp, mis asub oma värvi ruudul, löödaks algpositsioonil, siis oleks kaks kõrvutist nuppu, mis mõlemad löödaks algpositsioonil, mis pole ka võimalik. Järelikult iga oma värvi ruudul asuv nupp teeb vähemalt ühe käigu ja lööb oma esimesel käigul tema liikumissuunda jääva sama värvi naabernupu (seda pole saadud varem lüüa). Et üht värvi nuppe on kumbagi värvi ruutudel ühepalju, siis ükski oma värvi ruudul asuv nupp ei löö üle ühe oma värvi nupu.

Et nupud ilmselt ei saa üksteisest mööda minna, siis kumbagi värvi liikuvad nupud lüüakse algse paiknemise järjekorras keskruutudest lugedes. Seega viimasel käigul löödav nupp pärineb otsaruudult. Ka lööja nupp pärineb otsaruudult, sest eelmised on selleks ajaks löödud.

Selleks, et nupud otsaruutudelt jõuaksid kõrvutiasetsevatele ruutudele, mis võimaldab löömise, peavad nad kokku tegema $\frac{n}{2}-1$ sammu, millest $\frac{n}{2}-3$ sammul lüüakse vastasvärvi nuppe. Kuid liikuvaid nuppe peale nende kahe ongi $\frac{n-2}{2}-2$ ehk $\frac{n}{2}-3$. Järelikult kaks otsanuppu löövad kahe peale laualt kõik ülejäänud liikuvad nupud. Kui mõlemat värvi liikuvaid nuppe oleks peale otsanuppude veel, siis ei oleks see võimalik, sest enne satuksid need teised kokku. Seega on üht värvi liikuvaid nuppe vaid 1 ja kokku sama värvi nuppe 2. Sellega on näidatud, et ühel pool keskruute peab olema 2 nuppu ja teisel paarisarv.

Kui avakäigu järel tekkiv seis on niisugune, siis nõutud lõppseisu saame näiteks nii, et teeme algul kõik võimalikud käigud pikemas pooles, misjärel lööme lühema poole otsaruudul asuva nupuga järjest kõik ülejäänud.

Algseisus, mis annab seisu, kus ruudud 3 ja 4 on vabad, on vaba kas ruut 2 või 5, juhul $n = 2008$ saame sümmeetrilise seisu siis, kui vaba on ruut 2004 või 2007.

6. Näitame kõigepealt, et arvude n ja $(c(n)+1)\left(\frac{n}{c(n)}+1\right)$ vahel leidub arv y, millega arvude n ja $(c(n)+1)\left(\frac{n}{c(n)}+1\right)$ korrutis jagub. Osutub, et sobib $y = c(n)\cdot\left(\frac{n}{c(n)}+1\right)$; tõepoolest,

$$n = c(n)\cdot\frac{n}{c(n)} < y < (c(n)+1)\cdot\left(\frac{n}{c(n)}+1\right),$$

samas ilmselt

$$y \mid c(n)\cdot\frac{n}{c(n)}\cdot(c(n)+1)\cdot\left(\frac{n}{c(n)}+1\right) = n\cdot(c(n)+1)\cdot\left(\frac{n}{c(n)}+1\right).$$

Näitame nüüd, et kui $n < x < (c(n)+1)\cdot\left(\frac{n}{c(n)}+1\right)$, siis korrutis nx ei jagu ühegi arvuga n ja x vahelt. Selleks olgu y suvaline täisarv n ja x vahelt. Olgu $d = \text{SÜT}(y,n)$ ja $y' = \frac{y}{d}$, $n' = \frac{n}{d}$, siis y' ja n' on ühistegurita.

Et $c(n)$ ja $\frac{n}{c(n)}$ on n jagajaist keskmised, siis

$$c(n) + \frac{n}{c(n)} \leqslant d + \frac{n}{d}. \tag{4}$$

(Tõepoolest, vaatleme funktsiooni $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, mis on vahemikus $(0;1)$ kahanev. Siis $c(n) + \dfrac{n}{c(n)} = \sqrt{n} \cdot f\left(\dfrac{c(n)}{\sqrt{n}}\right)$ ja $d + \dfrac{n}{d} = \sqrt{n} \cdot f\left(\dfrac{\min\left(d, \frac{n}{d}\right)}{\sqrt{n}}\right)$ ning $\dfrac{\min\left(d, \frac{n}{d}\right)}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{c(n)}{\sqrt{n}} \leqslant 1$.)

Liites võrratuse (4) mõlemale poole $n + 1$ ja tegurdades, saame

$$(c(n) + 1) \cdot \left(\frac{n}{c(n)} + 1\right) \leqslant (d + 1) \cdot \left(\frac{n}{d} + 1\right). \tag{5}$$

Kuna $d \mid y$, siis $d \mid y - n > 0$, kust $d \leqslant y - n$. Seega $n + d \leqslant y$, millest

$$\frac{n}{d} + 1 \leqslant \frac{y}{d} = y'. \tag{6}$$

Kasutades võrratusi (5) ja (6), saame kokku võrratuste ahela

$$dy' = y < x < (c(n) + 1) \cdot \left(\frac{n}{c(n)} + 1\right) \leqslant (d + 1) \cdot \left(\frac{n}{d} + 1\right) \leqslant (d + 1)y'.$$

Seega x asub y' kahe järjestikuse kordse dy' ja $(d + 1)y'$ vahel, mistõttu $y' \nmid x$.

Oletame nüüd väitevastaselt, et $y \mid nx$. Taandades d-ga, saame $y' \mid n'x$. Et y' ja n' on ühistegurita, siis $y' \mid x$, vastuolu.

Märkus. Funktsioonide c ja s tabel väikeste argumentide jaoks on

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$c(n)$	1	1	1	2	1	2	1	2	3	2	1	3
$s(n)$	4	6	8	9	12	12	16	15	16	18	24	20

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$c(n)$	1	2	3	4	1	3	1	4	3	2	1	4
$s(n)$	28	24	24	25	36	28	40	30	32	36	48	35