IMO'09 Eesti võistkonna valikvõistlus

21.–22. aprill 2009 **Esimene päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Tõesta, et mistahes paarikaupa erinevate positiivsete reaalarvude a, b ja c korral kehtib võrratus

$$\frac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3} > 8abc.$$

2. Nimetame lõplikku positiivsete täisarvude hulka *ülevaks*, kui tema mistahes kaks elementi on ühistegurita, ja *kenaks*, kui tema iga mittetühja alamhulga elementide aritmeetiline keskmine on täisarv.

a) Tõesta, et iga positiivse täisarvu n korral leidub n-elemendiline positiivsete täisarvude hulk, mis on nii ülev kui ka kena.

b) Kas leidub selline lõpmatu positiivsete täisarvude hulk, mille iga ülev alamhulk on kena ning millel on olemas n-elemendiline ülev alamhulk iga positiivse täisarvu n jaoks?

Märkus. Hulk ei sisalda korduvaid elemente. Hulka Y nimetatakse hulga X *alamhulgaks*, kui hulga Y iga element on hulga X element.

3. Milliste naturaalarvude n korral leidub kumer hulktahukas, mis rahuldab kõiki järgmisi tingimusi?

(i) Iga tahk on korrapärane hulknurk.

(ii) Tahkude hulgas esineb ülimalt kahe erineva külgede arvuga hulknurki.

(iii) Leidub kaks ühise servaga tahku, mis on mõlemad n-nurgad.

IMO'09 Eesti võistkonna valikvõistlus

21.–22. aprill 2009 **Teine päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

4. Kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB võetakse vastavalt punktid A', B' ja C' nii, et $\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{|AC'|}{|C'B|}$. Punkti A' läbiv sirgega $B'C'$ paralleelne sirge lõikab sirgeid AC ja AB vastavalt punktides P ja Q. Tõesta, et $\frac{|PQ|}{|B'C'|} \geqslant 2$.

5. Mänguriba koosneb n ruudust, mis on nummerdatud järjest numbritega $1, 2, 3, \ldots, n$. Alguses on üks ruut vaba, igal ülejäänud ruudul aga asub üks nupp. Juhul, kui mingil ruudul asub nupp, selle mingil naaberruudul asub teine nupp ning naaberruudust järgmine ruut on vaba, siis tohib esimese nupu tõsta üle teise nupu vabale ruudule, eemaldades teise nupu ribalt. Leia kõik võimalused, millise numbriga ruut võib algseisus olla vaba, et selliste käikudega oleks võimalik jõuda seisuni, kus ribal on alles üksainus nupp, kui

a) $n = 2008$;

b) $n = 2009$.

6. Tähistagu $c(n)$ positiivse täisarvu n suurimat niisugust tegurit, mis pole suurem kui $\sqrt{n}$, ning $s(n)$ vähimat sellist täisarvu x, et $n < x$ ja korrutis nx jagub mingi täisarvuga y, kus $n < y < x$. Tõesta, et iga n korral

$$s(n) = (c(n) + 1) \cdot \left(\frac{n}{c(n)} + 1\right).$$