Valikvõistlus 2008

IMO'08 Eesti võistkonna valikvõistlus

9.–10. aprill 2008 **Esimene päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Võistlusest võtab osa 2008 programmeerijat. Igas voorus jaotatakse kõik programmeerijad kaheks ühesuuruseks võistkonnaks. Leia vähim voorude arv, mille järel saab tekkida olukord, kus iga kaks programmeerijat on olnud vähemalt ühes voorus erinevates võistkondades.

2. Kõõlnelinurga $ABCD$ diagonaalide AC ja BD keskpunktid on vastavalt F ja G.

a) Tõesta, et kui nelinurga tippudest B ja D tõmmatud nurgapoolitajad lõikuvad diagonaalil AC, siis

$$\frac{1}{4} \cdot |AC| \cdot |BD| = \sqrt{|AG| \cdot |BF| \cdot |CG| \cdot |DF|}.$$

b) Kas eelmise võrduse kehtivusest järeldub, et nelinurga tippudest B ja D tõmmatud nurgapoolitajad lõikuvad diagonaalil AC?

3. Olgu n positiivne täisarv ning x ja y sellised positiivsed reaalarvud, et $x^n + y^n = 1$. Tõesta võrratus

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

IMO'08 Eesti võistkonna valikvõistlus

9.–10. aprill 2008 **Teine päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

4. Jada (G_n) esimesed liikmed on $G_0 = 0$ ja $G_1 = 1$ ning iga $n \geqslant 2$ korral kehtib $G_n = G_{n-1} + G_{n-2} + 1$. Tõesta, et iga positiivse täisarvu m jaoks leidub selles jadas kaks järjestikust liiget, mis mõlemad jaguvad m-ga.

5. Ringjoonel c_1 on valitud punktid A ja B. Sirge AB puutub punktis B ringjoont c_2, mille keskpunkt asub ringjoonel c_1. Teine punkti A läbiv sirge lõikab ringjoont c_2 punktides D ja E, kusjuures D asub A ja E vahel. Sirge BD lõikab ringjoont c_1 teist korda punktis F. Tõesta, et sirge EB puutub ringjoont c_1 parajasti siis, kui D poolitab lõigu BF.

6. Nimetame *sulusõnaks* iga sõna, mida on võimalik koostada järgmiste reeglite abil.

1) () on sulusõna.
2) Kui s on sulusõna, siis (s) on sulusõna.
3) Kui s ja t on sulusõnad, siis st on sulusõna.

Sulusõna *keskkoodiks* nimetame naturaalarvude järjendit, mille saame, kui leiame iga avava ja talle vastava sulgeva sulu paari korral nende sulgude vahelisest keskkohast vasakule jäävate sulgude arvu ning kirjutame kõik saadud arvud suuruse järjekorras. Näiteks sulusõna (()) keskkood on $(2, 2)$, sulusõna ()() keskkood aga $(1, 3)$. Tõesta, et suvaliste erinevate sulusõnade keskkoodid on erinevad.

Отборочный конкурс на ММО'08

9–10 апреля 2008 г. **Первый день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В соревновании принимают участие 2008 программистов. В каждом туре всех программистов делят на две равные по величине команды. Найти наименьшее количество туров, в результате которых может возникнуть ситуация, когда любые два программиста были по крайней мере в одном туре в разных командах.

2. Центрами диагоналей AC и BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ являются соответственно точки F и G.

а) Доказать, что если биссектрисы, проведённые из вершин B и D четырёхугольника, пересекаются на диагонали AC, то

$$\frac{1}{4} \cdot |AC| \cdot |BD| = \sqrt{|AG| \cdot |BF| \cdot |CG| \cdot |DF|}.$$

б) Следует ли из выполнения предыдущего равенства, что биссектрисы, проведённые из вершин B и D четырёхугольника, пересекаются на диагонали AC?

3. Пусть n — положительное целое число, а x и y — такие положительные действительные числа, что $x^n + y^n = 1$. Доказать неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1 + x^{2k}}{1 + x^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1 + y^{2k}}{1 + y^{4k}}\right) < \frac{1}{(1 - x)(1 - y)}.$$

Отборочный конкурс на ММО'08

9–10 апреля 2008 г. **Второй день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. Первыми членами последовательности (G_n) являются $G_0 = 0$ и $G_1 = 1$, и при каждом $n \geqslant 2$ выполняется $G_n = G_{n-1} + G_{n-2} + 1$. Доказать, что для каждого положительного целого числа m найдутся в последовательности два последовательных члена, которые оба делятся на m.

5. На окружности c_1 выбраны точки A и B. Прямая AB касается в точке B окружности c_2, центр которой расположен на окружности c_1. Другая прямая, проходящая через точку A, пересекает окружность c_2 в точках D и E, причём D расположена между точками A и E. Прямая BD пересекает окружность c_1 второй раз в точке F. Доказать, что прямая EB касается окружности c_1 тогда и только тогда, когда D является серединой отрезка BF.

6. Назовём *скобочным словом* каждое слово, которое можно получить при помощи следующих правил:

1) () является скобочным словом.

2) Если s — скобочное слово, то и (s) — скобочное слово.

3) Если s и t — скобочные слова, то и st — скобочное слово.

Центральным кодом скобочного слова назовём последовательность натуральных чисел, которую получим, если найдём для каждой пары из открывающей и соответствующей ей закрывающей скобки, сколько скобок всего остаётся слева от центрального места между этими скобками, а все полученные числа запишем в порядке величины. Например, центральным кодом слова (()) является $(2,2)$, а центральным кодом слова ()() является $(1,3)$. Доказать, что центральные коды произвольных различных скобочных слов различны.

Lahendused

1. *Vastus:* 11.

Lahendus 1. Iga vooru järel vaatleme suurimat niisugust programmeerijate hulka, kuhu kuuluvad programmeerijad on kõigis senistes voorudes olnud samas võistkonnas. Enne esimest vooru koosneb see hulk 2008 programmeerijast. Iga vooruga saab nimetatud hulga elementide arv väheneda ülimalt 2 korda, sest sinna kuuluvad programmeerijad jagunevad uues voorus kahe võistkonna vahel ja kindlasti satuvad vähemalt pooled neist samasse võistkonda. Seega voorude arv on vähemalt $\log_2 2008$ ehk vähemalt 11.

Näitame, et 11 voorust piisab. Järjestame 2008 programmeerijat mingil viisil ning lisame neile nii algusesse kui lõppu 20 fiktiivset programmeerijat. Nummerdame need 2048 programmeerijat 11-kohaliste kahendarvudega 0-st 2047-ni, lisades vajadusel arvude ette nulle nii, et kõik kahendarvud oleksid võrdse pikkusega. Voorus i olgu ühes võistkonnas kõik need programmeerijad, kelle järjekorranumbri i-s kahendkoht on 0, ja teises programmeerijad, kellel see kahendkoht on 1. Igas voorus on järjekorra algusest k-s ja järjekorra lõpust k-s fiktiivne programmeerija erinevates võistkondades, sest nende kahendarvud on vastandlike kahendkohtadega. Järelikult on kummaski võistkonnas alati võrdne arv tegelikke programmeerijaid. Samuti on suvalised kaks programmeerijat mingis voorus erinevas võistkonnas, sest neile vastavad kahendarvud erinevad vähemalt ühe kahendkoha poolest.

Lahendus 2. Analoogiliselt lahendusega 1 tõestame, et $2n$ programmeerija puhul tuleb pidada vähemalt $\lceil \log_2 2n \rceil$ vooru.

Tõestame induktsiooniga k järgi, et kui programmeerijate arv $2n$ rahuldab võrratust $2^{k-1} < 2n \leqslant 2^k$, siis piisab k voorust. Kui $k = 1$, siis programmeerijaid on 2 ja ilmselt piisab 1 voorust. Eeldame, et väide kehtib mingi k korral. Olgu meil $2n$ programmeerijat, kus $2^k < 2n \leqslant 2^{k+1}$. Jaotame programmeerijad kaheks rühmaks, millest esimeses on $s = 2^k$ ja teises $t = 2n - s$ programmeerijat. Induktsiooni eelduse põhjal saame nii esimese kui teise rühma programmeerijad jaotada võistkondadeks nii, et pärast k vooru on ülesande tingimus täidetud kummagi rühma puhul (igas voorus jaotame kummagi rühma kaheks ühesuuruseks võistkonnaks). Voorudeks $1, \ldots, k$ paneme nüüd ühiseks võistkonnaks kokku ühe vastava vooru jaoks leitud esimese ja ühe teise rühma programmeerijatest koosneva võistkonna.

Eeldame üldisust kitsendamata, et k-ndas voorus koosneb üks võistkond esimese rühma programmeerijatest numbritega $1, \ldots, \frac{s}{2}$ ning teise rühma programmeerijatest numbritega $s+1, \ldots, s+\frac{t}{2}$. Viimaseks vooruks moodustame ühe võistkonna programmeerijatest $1, \ldots, \frac{s}{2}, s+\frac{t}{2}+1, \ldots, s+t$. Kontrollides näeme, et nii saavad iga kaks programmeerijat kuuluda vähemalt ühes voorus erinevatesse võistkondadesse.

2. *Vastus:* b) ei.

Lahendus 1. a) Olgu E tippudest B ja D tõmmatud nurgapoolitajate lõikepunkt (joonis 1). Nurgapoolitaja omaduse põhjal $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AD|}{|DC|}$, mis annab seose $|AB| \cdot |DC| = |AD| \cdot |BC|$. Kasutades Ptolemaiose teoreemi $|AB| \cdot |DC| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|$ saame nüüd võrdused

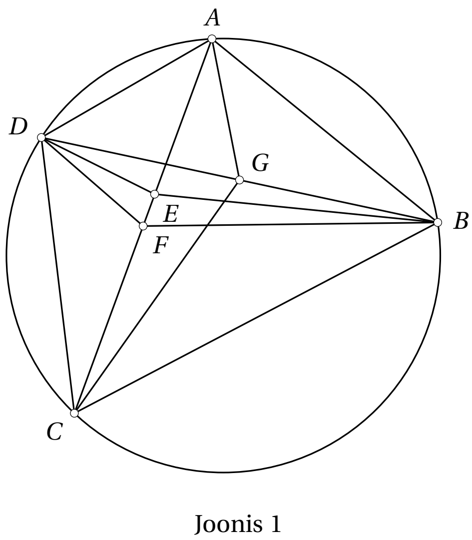
$$2 \cdot |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|, \qquad 2 \cdot |AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD|$$

ehk vastavalt

$$\frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|AF|}{|AD|}, \qquad \frac{|CD|}{|BD|} = \frac{|AF|}{|AB|}.$$

Et lisaks $\angle CBD = \angle CAD$, siis on kolmnurgad CBD ja FAD sarnased, ning et $\angle CDB = \angle CAB$, siis on kolmnurgad CDB ja FAB sarnased. Järelikult on kolmnurk FAD sarnane kolmnurgaga FBA. Seega $\frac{|FA|}{|FD|} = \frac{|FB|}{|FA|}$, millest

$$\frac{1}{4}|AC|^2 = |FB| \cdot |FD|.$$



Joonis 1

Edasi, seosest $|AB| \cdot |DC| = |AD| \cdot |BC|$ saame $\dfrac{|AB|}{|AD|} = \dfrac{|BC|}{|DC|}$, mis tähendab, et ka tippudest A ja C tõmmatud nurgapoolitajad lõikuvad diagonaalil BD. Korrates eelnevat arutelu, jõuame analoogilisele tulemusele

$$\frac{1}{4}|BD|^2 = |GA| \cdot |GC|.$$

Ülesandes nõutud võrduse saamiseks tuleb nüüd viimased kaks eraldi real asuvat võrdust pooliti korrutada ja tulemusest ruutjuur leida.

b) Vaatleme ristkülikut $ABCD$, kus $|AB| > |BC|$. Siis ilmselt $|AG| = |BF| = |CG| = |DF| = \dfrac{1}{2}|AC| = \dfrac{1}{2}|BD|$, mistõttu ülesandes antud võrdus kehtib. Teiselt poolt $\dfrac{|AB|}{|BC|} > 1 > \dfrac{|AD|}{|DC|}$ ehk tippudest B ja D tõmmatud nurgapoolitajad ei lõiku diagonaalil BD.

Lahendus 2. a) Märgime nelinurga sisenurki sümbolitega $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$. Koosinusteoreemist kolmnurgas DAB saame

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos\angle A,$$

kolmnurgas BCD aga, seost $\angle C = 180^\circ - \angle A$ arvestades,

$$|BD|^2 = |CB|^2 + |CD|^2 + 2 \cdot |CB| \cdot |CD| \cdot \cos\angle A.$$

Korrutame need kaks võrdust:

$$|BD|^4 = (|AB|^2+|AD|^2)(|CB|^2+|CD|^2) - 4\cdot|AB|\cdot|AD|\cdot|CB|\cdot|CD|\cdot\cos^2\angle A +$$
$$+ 2\left((|AB|^2 + |AD|^2)\cdot|CB|\cdot|CD| - (|CB|^2+|CD|^2)\cdot|AB|\cdot|AD|\right)\cdot\cos\angle A.$$

Teiselt poolt, et $2\overrightarrow{AG} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$, siis

$$4 \cdot |AG|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 + 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos\angle A$$

ning analoogiliselt (jällegi seose $\angle C = 180^\circ - \angle A$ abil)

$$4 \cdot |CG|^2 = |CB|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |CB| \cdot |CD| \cdot \cos\angle A.$$

Korrutades need võrdused, saame

$$16 \cdot |AG|^2 \cdot |CG|^2 =$$
$$= (|AB|^2 + |AD|^2)(|CB|^2 + |CD|^2) - 4 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot |CB| \cdot |CD| \cdot \cos^2\angle A -$$
$$- 2\left((|AB|^2 + |AD|^2)\cdot|CB|\cdot|CD| - (|CB|^2+|CD|^2)\cdot|AB|\cdot|AD|\right)\cdot\cos\angle A.$$

Et nurkade $\angle B$ ja $\angle D$ poolitajad lõikuvad diagonaalil AC, siis nurgapoolitaja omaduse põhjal $\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|CD|}$ ehk $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |CB|$. Seega

$$(|AB|^2 + |AD|^2) \cdot |CB| \cdot |CD| - (|CB|^2 + |CD|^2) \cdot |AB| \cdot |AD| =$$
$$= |AB| \cdot |AD| \cdot |CB|^2 + |AD| \cdot |AB| \cdot |CD|^2 - (|CB|^2 + |CD|^2) \cdot |AB| \cdot |AD| = 0.$$

Järelikult

$$|BD|^4 = 16 \cdot |AG|^2 \cdot |CG|^2.$$

Vaadeldes kolmnurki ABC ja CDA, saame sarnasel viisil, et

$$|AC|^4 = 16 \cdot |BF|^2 \cdot |DF|^2.$$

Korrutame viimased võrdused omavahel ja leiame tulemuse kummastki poolest neljanda juure.

b)-osa lahendame samamoodi nagu lahenduses 1.

3. Ülesande tingimustest järeldub, et $0 < x < 1$ ja $0 < y < 1$. Paneme tähele, et iga k korral $\frac{1 + x^{2k}}{1 + x^{4k}} < \frac{1}{x^k}$, sest

$$\frac{1 + x^{2k}}{1 + x^{4k}} - \frac{1}{x^k} = \frac{x^k + x^{3k} - 1 - x^{4k}}{(1 + x^{4k})x^k} = \frac{(x^{3k} - 1)(1 - x^k)}{(1 + x^{4k})x^k} < 0.$$

Analoogiliselt $\frac{1 + y^{2k}}{1 + y^{4k}} < \frac{1}{y^k}$. Seega

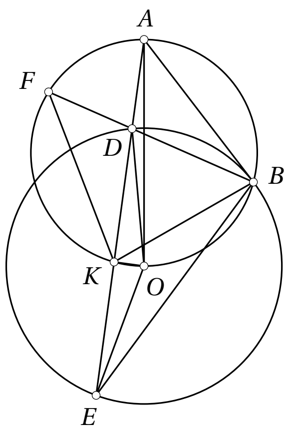
$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1 + x^{2k}}{1 + x^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1 + y^{2k}}{1 + y^{4k}}\right) < \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y^k}\right) = \frac{1 - x^n}{x^n(1 - x)} \cdot \frac{1 - y^n}{y^n(1 - y)} =$$
$$= \frac{y^n}{x^n(1 - x)} \cdot \frac{x^n}{y^n(1 - y)} = \frac{1}{(1 - x)(1 - y)}.$$

Märkus. Ülesande võrratus jääb kehtima, kui parema poole lugejas asendada arv 1 teatava väiksema arvuga c. On teada võrratuse kehtivus juhul $c = \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \ln 2\right)^2 \approx 0{,}7001$. Arvuti abil on püstitatud hüpotees, et c vähim sobiv väärtus on ligikaudu 0,6484.

Lahendused

4. Defineerime $G_{-1} = 0$, siis kehtib ülesandes antud seos $G_n = G_{n-1} + G_{n-2} + 1$ ka $n = 1$ korral. Vaatleme jada järjestikuste liikmete paare (G_n, G_{n+1}). Et täisarv saab m-ga jagades anda ainult m erinevat jääki, siis saavad need paarid liikmete jagamisel m-ga anda ülimalt m^2 erinevat jäägipaari. Samas on jadas liikmeid lõpmata palju, seetõttu leiduvad kaks paari (G_k, G_{k+1}) ja (G_l, G_{l+1}), kus $k < l$, mille korral tekivad samad jäägipaarid. Et $G_{n-2} = G_n - G_{n-1} - 1$, siis on jada kahe järjestikuse liikme korral üheselt määratud nendele eelnev liige. Sama kehtib ka m-ga jagamisel tekkivate jääkide kohta. Järelikult annavad ka liikmete paarid (G_{k-1}, G_k) ja (G_{l-1}, G_l) jagamisel m-ga samad jäägipaarid. Samamoodi jätkates näeme, et liikmete paarid (G_{-1}, G_0) ja (G_{l-k-1}, G_{l-k}) annavad samad jäägipaarid. Et $G_{-1} = G_0 = 0$, siis ongi liikmed G_{l-k-1} ja G_{l-k} otsitavad.

5. *Lahendus 1.* Olgu K sirge AD teine lõikepunkt ringjoonega c_1 (joonis 2). Kolmnurgad KFD ja BAD on sarnased vastavate nurkade võrdsuse tõttu. Kolmnurk BAD on sarnane kolmnurgaga EAB, sest puutuja ja lõikaja omaduse tõttu $\angle ABD = \angle BED$ ning tipu A juures on neil ühine nurk. Olgu O ringjoone c_2 keskpunkt. Et AB on ringjoone c_2 puutuja punktis B, siis $AB \perp BO$. Sellest nähtub, et AO on ringjoone c_1 diameeter, sest O



Joonis 2

asub eelduse põhjal ringjoonel c_1. Järelikult ka $OK \perp AK$, mistõttu OK on võrdhaarse kolmnurga ODE kõrgus. Seega $|DK| = |KE|$.

Sirge EB puutub ringjoont c_1 punktis B parajasti siis, kui $\angle EBK = \angle BAD$. Et $\angle ABD = \angle BED$, siis on eelmine võrdus samaväärne sellega, et kolmnurgad EBK ja BAD on sarnased. Sama nurkade võrduse tõttu leiab see sarnasus aset parajasti siis, kui $\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|DB|}{|KE|}$. Kolmnurkade EAB ja KFD sarnasuse tõttu on viimane võrdus samaväärne võrdusega $\frac{|FD|}{|DK|} = \frac{|DB|}{|KE|}$, mis nimetajate võrdsuse tõttu tähendab lihtsalt võrdust $|FD| = |DB|$.

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 näitame, et $|DK| = |KE|$. Olgu $|AD| = x$, $|DK| = |KE| = y$, $|BE| = z$, $|DB| = u$, $|FD| = v$, $|AB| = w$. Lõikuvate kõõlude omaduse põhjal $uv = xy$. Et AB on puutuja, siis $w^2 = x(x+2y)$. Kolmnurgad ABD ja AEB on sarnased, sest $\angle ABD = \angle BED$ ja tipu A juures on neil ühine nurk. Seega $\frac{u}{x} = \frac{z}{w}$, millest $z = \frac{uw}{x}$.

Tingimus, et sirge EB puutub ringjoont c_1, on samaväärne sellega, et $z^2 = y(x+2y)$. Näitame, et viimane seos on samaväärne võrdusega $u = v$:

$$z^2 = y(x+2y) \Leftrightarrow \frac{u^2w^2}{x^2} = y(x+2y) \Leftrightarrow u^2x(x+2y) = x^2y(x+2y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u^2 = xy \Leftrightarrow u^2 = uv \Leftrightarrow u = v.$$

6. Võime eeldada, et võrreldavad sulusõnad on sama pikkusega, sest vastasel korral erinevad nende keskkoodid juba liikmete arvu tõttu. Tõestame ülesande väite induktsiooniga sõna pikkuse järgi. Pikkuse 2 puhul kehtib väide triviaalselt. Olgu s ja t kaks pikemat erinevat sama pikkusega sulusõna. Vaatleme kummagi sõna prefiksit, st lühimat algusosa, mis moodustab iseseisva sulusõna. Sellist sõna alustav avav sulg ja teda lõpetav sulgev sulg on omavahel vastavuses.

Kui sõnade s ja t prefiksid on erineva pikkusega, vastavalt $2k$ ja $2l$, kus üldisust kitsendamata $2k < 2l$, siis vaatleme kummagi sõna keskkoodis k kõige väiksemat arvu. Sõna s puhul asugu vastavate sulupaaride avavad sulud positsioonidel $a_1, \ldots, a_k$ ja sulgevad sulud positsioonidel $b_1, \ldots, b_k$. Siis i-ndale sulupaarile vastab sõna s keskkoodis arv $\frac{a_i + b_i - 1}{2}$. Et sõna s esimesed $2k$ sümbolit moodustavad omaette sulusõna, siis on sulgude asukohad $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ parajasti arvud $1, 2, \ldots, 2k$ mingis järjekorras. Seega sõna s keskkoodis on k kõige väiksema liikme summa

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i + b_i - 1}{2} = \frac{1 + 2 + \ldots + 2k}{2} - \frac{k}{2}.$$

Sõna t keskkoodis on k kõige väiksema liikme summa aga suurem, sest kui vastavate sulgude asukohtade summa võrduks minimaalse võimaliku summaga $1 + 2 + \ldots + 2k$, siis leiduks sõna alguse avaval sulul paariline esimese $2k$ sulu seas ning sõna t prefiksi pikkus oleks ülimalt $2k$, mitte $2l$. Järelikult on sõnade s ja t keskkoodid erinevad.

Kui sõnade s ja t prefiksid on mõlemad pikkusega $2k$, siis on prefiksit alustava ja lõpetava sulu vahel asuv sõnaosa ning prefiksile järgnev sõnaosa mõlemad omaette sulusõnad (kui nad on mittetühjad). Et s ja t on erinevad, siis on neis kas esimesed nimetatud sõnaosad erinevad või teised erinevad. Esimesel juhul, kui s ja t prefiksite sulgude vahele jäävad sõnaosad on erinevad, siis vastavalt induktsiooni eeldusele on nende keskkoodid erinevad. Sõnade s ja t keskkoodides on need keskkoodid esindatud parajasti ühe võrra suuremate arvudega (sest vasakul on üks sümbol rohkem), kusjuures need arvud on kõik väiksemad kui $2k$. Lisaks sisaldub mõlemas keskkoodis arv k (sulupaar positsioonidel 1 ja $2k$) ning ülejäänud arvud on suuremad kui $2k$. Järelikult on s ja t keskkoodid erinevad. Teisel juhul, kui s ja t prefiksitele järgnevad sõnaosad on erinevad, siis on samuti induktsiooni eelduse põhjal nende keskkoodid erinevad. Sõnade s ja t keskkoodides on need keskkoodid esindatud parajasti $2k$ võrra suuremate arvudega, ülejäänud arvud s ja t keskkoodides on väiksemad kui $2k$. Seega on s ja t keskkoodid erinevad.

Märkus. Monotoonselt kasvav positiivsete täisarvude järjend $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on mingi sulusõna keskkood parajasti siis, kui iga $k = 1, 2, \ldots, n-1$ korral $\sum_{i=1}^{k} x_i \geqslant k^2$ ning lisaks $\sum_{i=1}^{n} x_i = n^2$.

Hindamisskeemid

1. *(Indrek Zolk)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Näidatud, et on tarvis vähemalt 11 vooru: 3 p
   - Näidatud, et 11 voorust piisab: 4 p

   Mitmel võistlejal ei olnud selge, et lisaks konstruktsioonile (ja põhjendusele, et konstruktsioon töötab) 11 vooru kohta tuleb näidata ka, et vähema kui 11 vooruga ülesande tingimusi rahuldada ei saa. (Ka vastupidi: leidus töid, kus oli püütud näidata, et on tarvis vähemalt 11 vooru, aga see oli põhjendamata, miks 11 voorust piisab.) Mõnel võistlejal oli konstruktsioon, et 11 voorust piisab, ebapiisavalt põhjendatud või oli jäänud üheselt mõistetavalt kirjeldamata (kus tarvis) üleminek 2048 programmeerijalt 2008 programmeerijale. Leidus ka mitu tööd, kus oli toodud konstruktsioone, mis andsid lõpptulemuseks rohkem kui 11 vooru.

2. *(Oleg Košik)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - a)-osa: 5 p

     Sealhulgas a)-osa tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

     - On leitud seos $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |AD|$: *1 p*
     - Üritatud avaldada diagonaalide ja mediaanide pikkused nelinurga küljepikkuste ja nurkade koosinuste kaudu: *1 p*
     - On leitud seos $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |AD|$, pandud kirja Ptolemaiose teoreem ja üritatud neid kahte fakti kombineerida: *2 p*

   - b)-osa: 2 p

     Sealhulgas

     - õige joonis ilma lõppjärelduseta ja kommentaarita: *1 p*

   Mõned lahendajad arvasid, et ülesandes kirjeldatud olukord on võimalik ainult siis, kui BD on ümberringjoone diameeter. See väide üldjuhul ei vasta tõele ja selle lihtsa erijuhu vaatlemise eest punkte ei antud.

3. *(Kaie Kubjas)* Ülesande eest sai ühe punkti ainult üks lahendaja, kes oli võrratuse ühe poole teisendanud kujule, millest pärast geomeetrilise jada

summa valemi rakendamist oleks saanud ühe vahetulemuse žürii lahendusest. Mitu lahendajat oli võrratuse tõestanud juhul $n = 1$: sellise lahenduse eest punkte ei antud, sest puudus induktsioonisamm. Samuti olid paljud näidanud võrratuse kehtivust konkreetsete arvude korral, ka need lahendused punkte ei saanud.

Hindamisskeemid

4. *(Laur Tooming)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Vaadeldud jada liikmete jääke m-ga jagades: 1 p
- Tähelepanek, et jada liige avaldub üheselt kahe järgneva liikme järgi: 1 p
- Olemas kõik tõestuseks vajalikud ideed: 4 p
- Lahenduse lõpuleviimine: 1 p

Mõned õpilased olid leidnud seoseid ülesandes antud jada ja Fibonacci jada vahel. Selle eest üksi punkte ei antud, sest Fibonacci jada kaudu vajaliku väite tõestamine ei oleks ilmselt lihtsam kui otse antud jada korral tehes.

5. *(Hendrik Nigul)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestus, et $|DK| = |KE|$: 3 p
- Tõestus, et kui EB puutub ringjoont c_1, siis $|FD| = |DB|$: 2 p
- Tõestus, et kui $|FD| = |DB|$, siis EB puutub ringjoont c_1: 2 p

6. *(Härmel Nestra)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Täislahendus (ei esinenud): 7 p
- Näidatud, et keskkoodi arvude summa võrdub komponentide arvu ruuduga: 3 p

  Sealhulgas:

  - Tehtud läbi juht, mis moodustab tõestusest olulise osa: *1 p*
  - Paljas tähelepanek ilma tõestuseta: *0 p*

  Lahendus induktsiooniga, kus esineb mõistlikke üksikosi: 1 p

Punkte ei andnud:

- selgitus, et keskkoodi esimene arv võrdub sulusõna alguses olevate avavate sulgude arvuga ja et selle arvu kordsus keskkoodis võrdub järgnevate lõpetavate sulgude arvuga (see on küll õige, aga ilmselt kasutu tähelepanek);
- selgitus, et piisab vaadelda vaid juhtu, kus kaks sulusõna on ühepikkused (sest see on liiga triviaalne, et nii raske ülesande juures seda hinnata);

- üksikjuhtude läbivaatus;
- näitamine, et sulusõnas on avavaid ja lõpetavaid sulge ühepalju, jms sulusõna iseloomu analüüs.

Paljud olid sulusõna ja keskkoodi vastavuse analüüsil teinud eeldusi, mis ei kehti. Kes said enda arvates liiga vähe punkte, neil soovitan mõelda sulusõnale $((())())$, mille keskkood on $(3,3,4,6)$ — see lükkab ümber paljud taolised vääroletused.