Отборочный конкурс на ММО’08

9–10 апреля 2008 г. **Первый день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В соревновании принимают участие 2008 программистов. В каждом туре всех программистов делят на две равные по величине команды. Найти наименьшее количество туров, в результате которых может возникнуть ситуация, когда любые два программиста были по крайней мере в одном туре в разных командах.

2. Центрами диагоналей AC и BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ являются соответственно точки F и G.

а) Доказать, что если биссектрисы, проведённые из вершин B и D четырёхугольника, пересекаются на диагонали AC, то

$$\frac{1}{4}\cdot|AC|\cdot|BD| = \sqrt{|AG|\cdot|BF|\cdot|CG|\cdot|DF|}.$$

б) Следует ли из выполнения предыдущего равенства, что биссектрисы, проведённые из вершин B и D четырёхугольника, пересекаются на диагонали AC?

3. Пусть n — положительное целое число, а x и y — такие положительные действительные числа, что $x^n + y^n = 1$. Доказать неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

Отборочный конкурс на ММО'08

9–10 апреля 2008 г. **Второй день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. Первыми членами последовательности (G_n) являются $G_0 = 0$ и $G_1 = 1$, и при каждом $n \geqslant 2$ выполняется $G_n = G_{n-1} + G_{n-2} + 1$. Доказать, что для каждого положительного целого числа m найдутся в последовательности два последовательных члена, которые оба делятся на m.

5. На окружности c_1 выбраны точки A и B. Прямая AB касается в точке B окружности c_2, центр которой расположен на окружности c_1. Другая прямая, проходящая через точку A, пересекает окружность c_2 в точках D и E, причём D расположена между точками A и E. Прямая BD пересекает окружность c_1 второй раз в точке F. Доказать, что прямая EB касается окружности c_1 тогда и только тогда, когда D является серединой отрезка BF.

6. Назовём *скобочным словом* каждое слово, которое можно получить при помощи следующих правил:

1) () является скобочным словом.
2) Если s — скобочное слово, то и (s) — скобочное слово.
3) Если s и t — скобочные слова, то и st — скобочное слово.

Центральным кодом скобочного слова назовём последовательность натуральных чисел, которую получим, если найдём для каждой пары из открывающей и соответствующей ей закрывающей скобки, сколько скобок всего остаётся слева от центрального места между этими скобками, а все полученные числа запишем в порядке величины. Например, центральным кодом слова (()) является $(2, 2)$, а центральным кодом слова ()() является $(1, 3)$. Доказать, что центральные коды произвольных различных скобочных слов различны.