

IMO'08 Eesti võistkonna valikvõistlus

9.–10. aprill 2008

Esimene päev

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

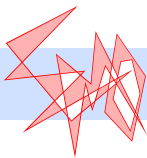
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Võistlusest võtab osa 2008 programmeerijat. Igas voorus jaotatakse kõik programmeerijad kaheks ühesuuruseks võistkonnaks. Leia vähim voorude arv, mille järel saab tekkida olukord, kus iga kaks programmeerijat on olnud vähemalt ühes voorus erinevates võistkondades.
2. Kõõlnelinurga $ABCD$ diagonaalide AC ja BD keskpunktid on vastavalt F ja G .
 - a) Tõesta, et kui nelinurga tippudest B ja D tõmmatud nurgapoolitajad lõikuvad diagonaalil AC , siis

$$\frac{1}{4} \cdot |AC| \cdot |BD| = \sqrt{|AG| \cdot |BF| \cdot |CG| \cdot |DF|}.$$

- b) Kas eelmise võrduse kehtivusest järeldub, et nelinurga tippudest B ja D tõmmatud nurgapoolitajad lõikuvad diagonaalil AC ?
3. Olgu n positiivne täisarv ning x ja y sellised positiivsed reaalarvud, et $x^n + y^n = 1$. Tõesta võrratus

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}} \right) < \frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$



IMO'08 Eesti võistkonna valikvõistlus

9.–10. aprill 2008

Teine päev

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

4. Jada (G_n) esimesed liikmed on $G_0 = 0$ ja $G_1 = 1$ ning iga $n \geq 2$ korral kehtib $G_n = G_{n-1} + G_{n-2} + 1$. Tõesta, et iga positiivse täisarvu m jaoks leidub selles jadas kaks järjestikust liiget, mis mõlemad jaguvad m -ga.
5. Ringjoonel c_1 on valitud punktid A ja B . Sirge AB puutub punktis B ringjoont c_2 , mille keskpunkt asub ringjoonel c_1 . Teine punkti A läbiv sirge lõikab ringjoont c_2 punktides D ja E , kusjuures D asub A ja E vahel. Sirge BD lõikab ringjoont c_1 teist korda punktis F . Tõesta, et sirge EB puutub ringjoont c_1 parajasti siis, kui D poolitab lõigu BF .
6. Nimetame *sulusõnaks* iga sõna, mida on võimalik koostada järgmiste reeglite abil.
 - 1) $()$ on sulusõna.
 - 2) Kui s on sulusõna, siis (s) on sulusõna.
 - 3) Kui s ja t on sulusõnad, siis st on sulusõna.

Sulusõna *keskkoodiks* nimetame naturaalarvude järjendit, mille saame, kui leiame iga avava ja talle vastava sulgeva sulu paari korral nende sulgude vahelisest keskkohast vasakule jäävate sulgude arvu ning kirjutame kõik saadud arvud suuruse järjekorras. Näiteks sulusõna $()()$ keskkood on $(2, 2)$, sulusõna $()()$ keskkood aga $(1, 3)$. Tõesta, et sivaliste erinevate sulusõnade keskkoodid on erinevad.