Valikvõistlus 2007

IMO'07 Eesti võistkonna valikvõistlus

21.–22. aprill 2007 **Esimene päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Tuumajaama juhtimispuldil asub ühes reas n lülitit ($n > 0$), millest igaühel on kaks võimalikku asendit: üleval või all. Lülitid on omavahel ühenduses nii, et alati, kui mõni lüliti liigub ülemisest asendist alumisse, muutub tema parempoolse naabri (kui see on olemas) asend automaatselt vastupidiseks. Esialgu on kõik lülitid all. Juhtimispuldi operaator muudab kõigepealt vasakpoolseima lüliti asendit 1 kord, siis vasakult teise lüliti asendit 2 korda jne kuni lõpuks parempoolseima lüliti asendit n korda. Mitu lülitit on nende operatsioonide järel üleval?

2. Kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt on D. Olgu E ja F punktiga D sümmeetrilised punktid vastavalt sirgete AB ja AC suhtes. Lisaks olgu R_1 ja R_2 vastavalt kolmnurkade BDE ja CDF ümberringjoonte raadiused ning r_1 ja r_2 samade kolmnurkade siseringjoonte raadiused. Tõesta, et

$$|S_{ABD} - S_{ACD}| \geqslant |R_1 r_1 - R_2 r_2|,$$

kus S_K tähistab kujundi K pindala.

3. Olgu n naturaalarv, $n \geqslant 2$. Tõesta, et kui mingi positiivse täisarvu b korral on arv $\dfrac{b^n - 1}{b - 1}$ algarvu aste, siis n on algarv.

IMO'07 Eesti võistkonna valikvõistlus

21.–22. aprill 2007 **Teine päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

4. Ruudu $ABCD$ külje BC sisepiirkonnas on võetud punkt E ja külje CD sisepiirkonnas punkt F nii, et punktist F lõigule AE tõmmatud ristsirge läbib lõigu AE ja diagonaali BD lõikepunkti G. Lõigul FG on valitud punkt K nii, et $|AK| = |EF|$. Leia nurga EKF suurus.

5. Leia kõik pidevad funktsioonid $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad suvaliste reaalarvude x ja y korral võrdust

$$f(x + f(y)) = y + f(x + 1).$$

6. Antud on ruudustik mõõtmetega 10×10. Igal käigul värvitakse neli ühikruutu, mis on saadud mingi kahe horisontaali ja kahe vertikaali lõikumisel, kusjuures vähemalt üks neist ruutudest peab olema seni värvimata. Milline on *suurim* käikude arv, millega saab ära värvida kogu ruudustiku?

Отборочный конкурс на ММО'07

21–22 апреля 2007 г. **Первый день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. На пульте управления атомной станцией расположены в ряд n переключателей ($n > 0$), у каждого из которых возможны два положения: верхнее и нижнее. Переключатели соединены между собой таким образом, что всегда, когда какой-то переключатель передвигается из верхнего положения в нижнее, положение его правого соседа (в случае наличия такого) изменяется автоматически на противоположное. Вначале все переключатели в нижнем положении. Оператор пульта управления в первую очередь 1 раз изменяет положение самого левого переключателя, затем 2 раза второго слева переключателя и так далее, в конце изменяя n раз положение самого правого переключателя. Сколько переключателей будет в верхнем положении после всех этих операций?

2. Точка D — основание высоты, проведённой из вершины A треугольника ABC. Пусть E и F — точки, симметричные D относительно прямых AB и AC соответственно. Также пусть R_1 и R_2 — соответственно радиусы описанных окружностей треугольников BDE и CDF, а r_1 и r_2 — радиусы вписанных окружностей этих же треугольников. Доказать, что

$$|S_{ABD} - S_{ACD}| \geqslant |R_1 r_1 - R_2 r_2|,$$

где S_K обозначает площадь фигуры K.

3. Пусть n — натуральное число, $n \geqslant 2$. Доказать, что если при каком-то положительном целом числе b число $\dfrac{b^n - 1}{b - 1}$ — степень простого числа, то n — простое число.

Отборочный конкурс на ММО'07

21–22 апреля 2007 г. **Второй день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. Во внутренней области стороны BC квадрата $ABCD$ взята точка E, а во внутренней области стороны CD — точка F так, что перпендикуляр, опущенный из точки F на отрезок AE, проходит через точку пересечения G отрезка AE и диагонали BD. На отрезке FG выбрана точка K так, что $|AK| = |EF|$. Найти величину угла EKF.

5. Найти все непрерывные функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые при любых действительных числах x и y удовлетворяют равенству

$$f(x + f(y)) = y + f(x + 1).$$

6. Дано клетчатое поле размерами 10×10. Каждым ходом закрашивают четыре клетки, которые получены при пересечении каких-то двух горизонталей и двух вертикалей, причём по крайней мере одна из этих клеток должна быть до этого не закрашена. Каково *наибольшее* число ходов, которым можно закрасить всё клетчатое поле?

Lahendused

1. *Vastus:* 1.

Lahendus 1. Nummerdame lülitid vasakult paremale arvudega 1 kuni n. Kõigepealt tõestame, et kahe järjestikuse lülituse koosmõju ei sõltu sellest, kummas järjekorras lülitused sooritatakse. Tõepoolest, olgu x kahest lülitist vasakpoolsema ja y parempoolsema järjekorranumber.

- Kui leidub selline z, kus $x \leqslant z < y$, et lüliti z on all, siis saab lüliti x asendi muutmine mõjutada ainult lüliteid x kuni z, lüliti y asendi muutmine aga lülitit y ja temast paremal asuvaid lüliteid. Seega on nende kahe lülituse mõju teineteisest sõltumatu.
- Kui sellist z-i ei leidu, siis kutsub lüliti x asendi muutmine esile lüliti y liikumise. Pärast seda on lülitid x kuni $y-1$ all, kõik suurema numbriga lülitid aga samas asendis nagu siis, kui oleksime lüliti x asemel nihutanud lülitit y. Järelikult nii x kui ka y asendi muutmise järel on sõltumata muutmiste järjekorrast lülitid x kuni $y-1$ all ning suurema numbriga lülitid samas asendis, milles nad oleksid pärast lüliti y kahekordset liigutamist.

Tõestame nüüd, et ülesandes kirjeldatud operatsioonide tulemusel jääb üles parajasti vasakpoolseim lüliti. Väide ilmselt kehtib juhul $n = 1$. Eeldame, et väide kehtib n lüliti korral, ning vaatleme olukorda, kus lülitite arv on $n+1$. Ülaltoodu põhjal võib lülitusi sooritada suvalises järjekorras, lõpptulemus on sama. Muudame kõigepealt lüliti 2 asendit 1 kord, lüliti 3 asendit 2 korda jne kuni lüliti $n+1$ asendit n korda. Induktsiooni eelduse põhjal on nüüd lüliti 2 üleval ja kõik ülejäänud lülitid all. Seejärel muudame veel paremalt alates järjest iga lüliti asendit 1 kord. Sellega nihkuvad lülitid $n+1$ kuni 3 üles, lüliti 2 allavajutamine viib lülitid 3 kuni $n+1$ jälle tagasi alla ning lõpuks nihutame lüliti 1 üles.

Lahendus 2. Olgu a_i vasakult i-nda lüliti asendivahetuste arv protsessi vältel. Vastavalt ülesande tingimustele liigub iga lüliti parajasti juhtudel, kui operaator tema asendit muudab või kui eelmine lüliti liigub alla. Et alguses olid lülitid all, siis liigub i-s lüliti alla $\left[\frac{a_i}{2}\right]$ korda. Järelikult $i \geqslant 2$ korral alati $a_i = i + \left[\frac{a_{i-1}}{2}\right]$, samuti ilmselt $a_1 = 1$.

Tõestame induktsiooniga, et kui $i \geqslant 2$, siis $a_i = 2(i-1)$. Et $a_2 = 2 + \left[\frac{a_1}{2}\right] = 2 + \left[\frac{1}{2}\right] = 2$, siis juhul $i = 2$ väide kehtib. Eeldusel, et väide kehtib i korral, saame

$$a_{i+1} = i + 1 + \left[\frac{a_i}{2}\right] = i + 1 + \left[\frac{2(i-1)}{2}\right] = 2i$$

ehk väide kehtib ka $i+1$ korral.

Seega kokkuvõttes a_1 on paaritu ja iga $i \geqslant 2$ korral on a_i paaris. Seega on protsessi lõpus esimene lüliti üleval ja ülejäänud lülitid all.

Lahendus 3. Interpreteerime lülitite asendit kahendsüsteemi arvudena nii, et lüliti i asend tähistab arvu lõpust alates i-ndat numbrit: kui lüliti on all, siis see number on 0; kui üleval, siis 1. Lüliti i asendi muutmine vastab siis lihtsalt arvu 2^{i-1} juurdeliitmisele mooduli 2^n järgi. Alguses kodeerivad lülitite asendid arvu 0 ning meil on vaja sellele juurde liita arv $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + \ldots + n \cdot 2^{n-1}$ mooduli 2^n järgi.

Tõestame induktsiooniga, et $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + \ldots + n \cdot 2^{n-1} \equiv 1 \pmod{2^n}$. Juhul $n = 1$ saame $1 \equiv 1 \pmod 2$, mis kehtib. Eeldame, et väide kehtib juhul $n = k$. Korrutame kõiki liikmeid 2-ga:

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + k \cdot 2^k \equiv 2 \pmod{2^{k+1}}.$$

Liites tulemuse mõlemale poolele arvu $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$, saame

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + (k+1) \cdot 2^k \equiv 2 + 2^{k+1} - 1 \equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$$

ehk väide kehtib ka juhul $n = k + 1$.

Märkus. Ülesannet on võimalik lahendada ka nii, et tõestada induktsiooniga võrdus $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + \ldots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1$ ja järeldada sellest lahenduses 3 tõestatud kongruents.

2. *Lahendus 1.* Vaatleme esmalt juhtu, kus aluspunkt D asub punktide B ja C vahel (joonis 1). Et $S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |BD|$ ja $S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |CD|$, siis

$$S_{ABD} - S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot (|BD| - |CD|).$$

Olgu G kolmnurga BDE siseringjoone keskpunkt ja G' punktist G lõigule BD tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Siis ilmselt $|GG'| = r_1$. Sümmeetria tõttu $\angle BEA = \angle BDA = 90^\circ$, seega on $BEAD$ kõõlnelinurk ja lõik AB on tema ümberringjoone diameeter. Järelikult $|AB| = 2R_1$. Et kolmnurgad ADB ja $GG'B$ on sarnased, siis $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|GB|}{|GG'|}$, millest $|AB| \cdot |GG'| = |AD| \cdot |GB|$ ehk

$2R_1 r_1 = |AD| \cdot |GB|$. Analoogiliselt saame kolmnurga CDF siseringjoone keskpunkti H puhul $2R_2 r_2 = |AD| \cdot |HC|$. Järelikult

$$R_1 r_1 - R_2 r_2 = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot (|GB| - |HC|).$$

Edasi, kolmnurk ADG on võrdhaarne, sest $\angle ADG = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BDE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DAG$ ning $\angle AGD = 180^\circ - \angle DAG - \angle ADG = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DAG$. Järelikult $|AD| = |AG|$. Analoogiliselt $|AD| = |AH|$. Seega $|AG| = |AH|$. Täisnurksetest kolmnurkadest ABD ja ACD saame Pythagorase teoreemi põhjal $|AD|^2 + |BD|^2 = |AB|^2$ ja $|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2$. Lahutades esimesest võrdusest teise, tekib võrdus $|BD|^2 - |CD|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$ ehk $\big(|BD| - |CD|\big) \cdot \big(|BD| + |CD|\big) = \big(|AB| - |AC|\big) \cdot \big(|AB| + |AC|\big)$, millest

$$\big||BD| - |CD|\big| \cdot |BC| = \big||GB| - |HC|\big| \cdot \big(|AB| + |AC|\big).$$

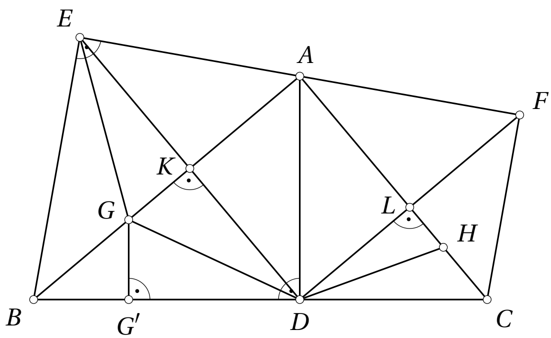
Et siin kolmnurgavõrratuse põhjal $|BC| < |AB| + |AC|$, siis peab olema $\big||BD| - |CD|\big| \geqslant \big||GB| - |HC|\big|$, millest saamegi tõestatava võrratuse.

Kui kõrguse aluspunkt D ei asu punktide B ja C vahel (joonis 2), näiteks asub kiirel BC, siis peegeldame lõiku AC kõrguse AD suhtes, millega punktid C ja H teisenevad vastavalt teatavateks punktideks C' ja H'. Nüüd saame rakendada eelnevat lahenduskäiku kolmnurgale ABC' ning ülesande väide järeldub asjaolust, et $|C'D| = |CD|$ ja $|H'C'| = |HC|$.

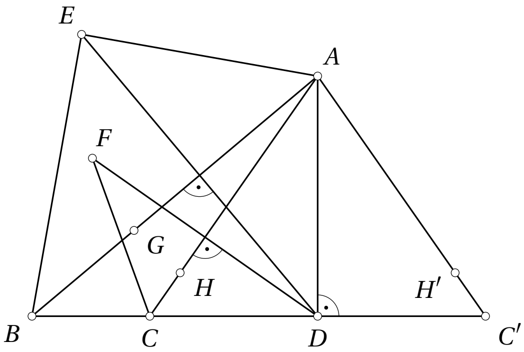
Lahendus 2. Olgu $\angle BAD = \beta$ ja $\angle CAD = \gamma$. Siis

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |BD| = \frac{1}{2}|AD|^2 \tan\beta.$$

Nagu eelmises lahenduses näitame, et $BEAD$ on kõõlnelinurk. Olgu K tema diagonaalide lõikepunkt. Et $R_1 = \frac{|AB|}{2}$, siis $R_1 = \frac{|AD|}{2\cos\beta}$. Peale selle



Joonis 1



Joonis 2

$r_1 = |GK|$ ning $\angle GDK = \dfrac{\angle BDE}{2} = \dfrac{\angle BAD}{2} = \dfrac{\beta}{2}$. Seega $r_1 = |DK| \tan\dfrac{\beta}{2} = |AD| \sin\beta \tan\dfrac{\beta}{2}$. Järelikult

$$R_1 r_1 = \frac{|AD|}{2\cos\beta} \cdot |AD| \sin\beta \tan\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} |AD|^2 \tan\beta \tan\frac{\beta}{2}.$$

Analoogiliselt leiame

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} |AD|^2 \tan\gamma, \qquad R_2 r_2 = \frac{1}{2} |AD|^2 \tan\gamma \tan\frac{\gamma}{2}.$$

Saadud avaldistest näeme, et $S_{ABD} - S_{ACD}$ ja $R_1 r_1 - R_2 r_2$ on sama märgiga, sest nurgad β ja γ kuuluvad esimesse veerandisse, kus tangens on kasvav. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et mõlemad avaldised on mittenegatiivsed (vastasel korral vahetame tipud B ja C). Sel juhul $\beta \geqslant \gamma$ ning ülesande võrratus on samaväärne võrratusega $S_{ABD} - R_1 r_1 \geqslant S_{ACD} - R_2 r_2$. Nüüd

$$S_{ABD} - R_1 r_1 = \frac{1}{2} |AD|^2 \tan\beta \left(1 - \tan\frac{\beta}{2}\right) = \\ = \frac{1}{2} |AD|^2 \frac{2\tan\frac{\beta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\beta}{2}} \left(1 - \tan\frac{\beta}{2}\right) = |AD|^2 \frac{\tan\frac{\beta}{2}}{1 + \tan\frac{\beta}{2}},$$

millest

$$S_{ABD} - R_1 r_1 = |AD|^2 \left(1 - \frac{1}{1 + \tan\frac{\beta}{2}}\right)$$

ning analoogiliselt

$$S_{ACD} - R_2 r_2 = |AD|^2 \left(1 - \frac{1}{1 + \tan\dfrac{\gamma}{2}}\right).$$

Et tangens on esimeses veerandis kasvav, siis juhul $\beta \geqslant \gamma$ kehtib võrratus $S_{ABD} - R_1 r_1 \geqslant S_{ACD} - R_2 r_2$.

3. Ilmselt $b \geqslant 2$. Eeldame, et $\dfrac{b^n - 1}{b - 1} = p^l$, kus p on algarv, siis $n \geqslant 2$ tõttu $l \geqslant 1$. Kui n avaldub kujul $n = xy$, kus x ja y on ühest suuremad naturaalarvud, siis vaatleme esitust

$$\frac{b^{xy} - 1}{b - 1} = \frac{b^{xy} - 1}{b^y - 1} \cdot \frac{b^y - 1}{b - 1} = (1 + b^y + \ldots + b^{y(x-1)}) \cdot \frac{b^y - 1}{b - 1}.$$

Viimases korrutises on mõlemad tegurid p astmed, sest vaadeldav arv ise on p aste. Et x ja y on mõlemad 1-st suuremad, siis jaguvad mõlemad tegurid p-ga. Teises teguris jagub siis $b^y - 1$ samuti p-ga, mistõttu esimeses teguris annavad kõik liikmed sulgudes p-ga jagades jäägi 1 ehk esimene tegur annab sama jäägi nagu arv $1 + 1 + \ldots + 1 = x$. Järelikult x jagub p-ga. Seega jagub arvu n iga ühest suurem tegur p-ga, mis on võimalik ainult juhul, kui $n = p^m$ mingi positiivse täisarvu m korral.

Vaatleme esitust

$$\frac{b^{p^m} - 1}{b - 1} = \frac{b^{p^m} - 1}{b^{p^{m-1}} - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{b^{p^2} - 1}{b^p - 1} \cdot \frac{b^p - 1}{b - 1}.$$

Et vasak pool on eelduse järgi p positiivses astmes, siis on ka tema tegur $\dfrac{b^p - 1}{b - 1}$ arv p positiivses astmes. Seega jagub viimase murru lugeja p-ga ehk b^p annab jagamisel p-ga jäägi 1. Fermat' väikese teoreemi põhjal annab b^p jagamisel p-ga sama jäägi nagu b. Järelikult $b - 1$ jagub p-ga. Siis aga peab murru lugeja $b^p - 1$ jaguma vähemalt arvuga p^2 ehk b^p annab p^2-ga jagamisel jäägi 1. Kui nüüd arvu $n = p^m$ puhul oleks $m \geqslant 2$, siis kuulub ülaltoodud esitusse ka tegur $\dfrac{b^{p^2} - 1}{b^p - 1} = 1 + b^p + \ldots + b^{p(p-1)}$. See annab ühelt poolt p^2-ga jagades jäägi $1 + 1 + \ldots + 1 = p$. Teiselt poolt on see tegur p aste ühest suurema astendajaga, sest b^p peab olema suurem kui p, ning ta annab p^2-ga jagades jäägi 0. See vastuolu näitab, et $m = 1$.

Märkus 1. Lahenduse lõpuosas pole Fermat' väikese teoreemi kasutamine tingimata vajalik. Kui oletada, et juhul $m \geqslant 2$ annab b^p jagamisel p^2-ga jäägi 1, siis saame eelnevaga analoogiliselt vastuolu, et $\dfrac{b^{p^2} - 1}{b^p - 1}$ annab p^2-ga jagamisel ühelt poolt jäägi p ning teiselt poolt jäägi 0. Järelikult juhul

$m \geqslant 2$ jagub tegur $\dfrac{b^p - 1}{b - 1}$ arvuga p, aga mitte arvuga p^2. Et see tegur on p aste, siis ainsa võimalusena $\dfrac{b^p - 1}{b - 1} = p$. Samas aga

$$\frac{b^p - 1}{b - 1} = 1 + b + \ldots + b^{p-1} > b^{p-1} \geqslant 2^{p-1} \geqslant p.$$

Märkus 2. Erijuhul $b = 2$ ja $l = 1$ taandub ülesanne üldtuntud väiteks, et kui Mersenne'i arv M_n on algarv, siis n on samuti algarv.

Lahendused

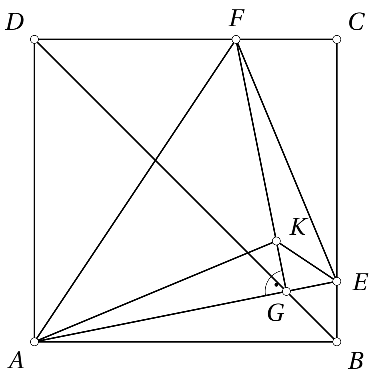
4. *Vastus:* 135°.

Nelinurk $AGFD$ on kõõlnelinurk, sest $\angle AGF = \angle ADF = 90^\circ$ (joonis 3). Järelikult $\angle GAF = \angle GDF = 45^\circ$ ja $\angle GFA = \angle GDA = 45^\circ$. Seega on kolmnurk AGF võrdhaarne ning $|GA| = |GF|$. Nüüd saame, et täisnurksed kolmnurgad AGK ja FGE on võrdsed, sest neil on võrdsed hüpotenuusid ja üks paar võrdseid kaateteid. Järelikult $|GK| = |GE|$, mistõttu täisnurkne kolmnurk GKE on võrdhaarne ja $\angle GKE = 45^\circ$. Seega $\angle EKF = 180^\circ - \angle GKE = 135^\circ$.

5. *Vastus:* $f(x) = 1 + x$ ja $f(x) = 1 - x$.

Olgu a reaalarv, mille korral $f(a) = 0$. Selline reaalarv leidub, sest võttes antud võrrandis $y = -f(x+1)$, näeme, et funktsiooni f väärtus teataval kohal on 0. Edasi vaatleme kahte juhtu.

Olgu $a \neq 1$. Valime algses võrrandis $y = x + 1$, saame $f(x + f(x+1)) = x + 1 + f(x+1)$. Defineerime funktsiooni $g(x) = x + f(x+1)$, siis võime saadud võrduse kirjutada kujul $f(g(x)) = 1 + g(x)$, mis kehtib iga x korral. Funktsiooni f pidevuse tõttu on ka g pidev. Valides nüüd algses võrrandis $y = a$, saame $f(x) = a + f(x+1)$ ehk $f(x) - f(x+1) = a$. Siit järeldub $g(x-1) - g(x) = a - 1$ iga x korral. Et $a \neq 1$, siis omandab funktsioon g kui tahes suuri ja kui tahes väikesi väärtusi, pidevuse tõttu omandab ta siis üldse kõiki väärtusi. Järelikult $f(z) = 1 + z$ iga z korral.



Joonis 3

Olgu $a = 1$. Siis $f(1) = 0$. Valime algses võrrandis $x = 0$, saame $f(f(y)) = y$ iga reaalarvu y korral. Seejärel valime algses võrrandis $y = f(1-x)$, saame $f(x + f(f(1-x))) = f(1-x) + f(x+1)$ ehk $0 = f(1-x) + f(x+1)$. Lõpuks valime algses võrrandis $y = 1 - x$, saame $f(x + f(1-x)) = 1 - x + f(x+1)$ ehk eelneva põhjal $f(x + f(1-x)) = 1 - x - f(1-x)$. Defineerime funktsiooni $h(x) = x + f(1-x)$, siis võime saadud võrduse kirjutada kujul $f(h(x)) = 1 - h(x)$, mis kehtib iga x korral. Funktsioon h on pidev. Valides algses võrrandis x asemel $-x$ ja $y = 1$, saame $f(-x) = 1 + f(1-x)$ ehk $f(-x) - f(1-x) = 1$, millest järeldub $h(x+1) - h(x) = 2$. Pidevuse tõttu omandab funktsioon h kõiki väärtusi, järelikult $f(z) = 1 - z$ iga z korral.

Kontroll näitab, et mõlemad leitud funktsioonid rahuldavad ülesande tingimusi.

6. *Vastus:* 81.

Kui kõigil käikudel valime esimese horisontaali ja esimese vertikaali ning ülejäänud liinid nii, et nende lõikeruut läbib järjestikku ülejäänud 9×9 ruudustiku kõik ruudud, siis saame ruudustiku ära värvida 81 käiguga.

Näitame, et see arv on maksimaalne. Vaatleme mingit käikude jada. Iga käigu jaoks märgime ära ühe ruutudest, mis värvitakse esmakordselt just sellel käigul. Värvime nüüd ruudustikus kõik märkimata jäänud ruudud. Kui läbida vaadeldav käikude jada sellel ruudustikul, siis värvitakse iga kord täpselt üks ruut, sest ülejäänud sellel käigul vaadeldavad ruudud on värvitud juba kas mingil varasemal käigul või siis kohe alguses.

Moodustame 20-tipulise graafi, mille tippudeks on ruudustiku kõik horisontaalid ja vertikaalid. Värvides mingi ruudu, ühendame omavahel selle ruudu horisontaalile ja vertikaalile vastavad tipud. Servad, mis vastavad märkimata jäänud ruutudele, lisame graafile kohe alguses, igal käigul lisandub graafile siis täpselt üks uus serv. Paneme tähele, et igal käigul ühendatakse servaga alati kaks sellist tippu, mida juba ühendab servade ahel. Tõepoolest, kui käigu tegemiseks on valitud horisontaalid a ja b ning vertikaalid c ja d, kusjuures värvime ruudu (b, d), siis on tipud b ja d omavahel ühendatud ahelaga $b - c - a - d$. Seetõttu peavad servad, mis lisati graafile kohe alguses, olema sellised, et neid mööda pääseb graafi igast tipust igasse teise tippu – vastasel korral peaksime mingil käigul ühendama kaks tippu, mis ei ole omavahel ühendatud eelmainitud ahelaga. Et tippe on 20, peab servi olema alguses vähemalt 19. Järelikult uusi servi ja ka käike saab olla maksimaalselt $100 - 19 = 81$.

Hindamisskeemid

1. *(Härmel Nestra)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti. Skeem põhineb žürii lahendusel 1.

- Näitamine, et lülituste koosmõju ei sõltu järjekorrast: 3 p
- Näitamine, et lõpuks jääb üles parajasti esimene lüliti: 4 p

Enamiku lähenemine põhines aga ideedel, mis on žürii materjalides vormistatud lahendusena 2. Sellele vastav skeem on järgmine; lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Selgitamine, et i-s lüliti liigub alla $\left\lfloor \frac{a_i}{2} \right\rfloor$ korda: 1 p
- Selgitamine, et $a_1 = 1$ ja iga $i \geqslant 2$ korral $a_i = i + \left\lfloor \frac{a_{i-1}}{2} \right\rfloor$: 1 p
- Induktsiooniga näitamine, et iga $i \geqslant 2$ korral $a_i = 2(i-1)$: 3 p
- Üldised paarsuskaalutlused või järeldamine, et iga $i \geqslant 2$ korral on i-s lüliti protsessi lõpus all: 1 p
- Lõppjärelduse tegemine: 1 p

2. *(Juhan Aru)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Võrratuse geomeetriline või trigonomeetriline teisendamine: kuni 4 p
- Lahenduse lõpuleviimine: 2 p
- Juhtude teravnurkne, nürinurkne eraldamine: 1 p

3. *(Mart Abel)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tähelepanek, et $\frac{b^n - 1}{b - 1} = b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b + 1$: 1 p
- Oletatud, et $n = km$, ning avaldatud arv $\frac{b^n - 1}{b - 1}$ korrutisena $\frac{b^k - 1}{b - 1} \cdot (1 + b^k + b^{2k} + \ldots + b^{(m-1)k})$: 1 p
- Näidatud, et n saab olla vaid kujul $n = p^l$, kus p on algarv ja l on naturaalarv: 2 p
- Näidatud, et l saab olla vaid 1: 3 p

Lohakusvigade eest võeti punkte maha.

Hindamisskeemid

4. *(Hendrik Nigul)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Antud õige vastus, leitud mõned nurkade vahelised seosed: 0 p
- Väike kasulik tähelepanek: 1–2 p
- Täislahendus, kus on kasutatud tunnust KKN kolmnurkade sarnasuse näitamiseks: 6 p
- Täislahendus: 7 p

5. *(Indrek Zolk)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Saadud vähemalt kaks edasiviivat omadust, näiteks $f(0) = 1$ ja $f(f(x)) = x + f(1)$ iga x korral vmt: 1 p
- Kõigi lahendite leidmine lõpule viidud: 5 p
- Kontrollitud mõlema lahendi $f(x) = -x + 1$ ja $f(x) = x + 1$ sobivust: 1 p

Mitmes lahenduses oli eeldatud, et otsitav funktsioon avaldub teatud kindlal kujul, nt on lineaarfunktsioon, mis tahes polünoom vmt. Selliselt võib ära näidata, et vaadeldaval kujul rohkem võrrandit rahuldavaid funktsioone ei leidu, aga selline lahendus ei aita reeglina kuidagi kaasa ülesande lahendamisele üldjuhul. Mõni lahendaja oli ka funktsiooni mõistest valesti aru saanud.

6. *(Jan Villemson)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Konstruktsioon, mis näitab, et 81 käiku on võimalik teha: 1 p
- Tõestus, et üle 81 käigu ei saa teha: 6 p

Tõestuse osa eest ei saadud reaalselt ühtegi punkti.