

Отборочный конкурс на ММО'07

21–22 апреля 2007 г.

Первый день

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.

Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

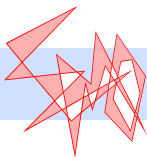
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. На пульте управления атомной станцией расположены в ряд n переключателей ($n > 0$), у каждого из которых возможны два положения: верхнее и нижнее. Переключатели соединены между собой таким образом, что всегда, когда какой-то переключатель передвигается из верхнего положения в нижнее, положение его правого соседа (в случае наличия такого) изменится автоматически на противоположное. Вначале все переключатели в нижнем положении. Оператор пульта управления в первую очередь 1 раз изменяет положение самого левого переключателя, затем 2 раза второго слева переключателя и так далее, в конце изменяя n раз положение самого правого переключателя. Сколько переключателей будет в верхнем положении после всех этих операций?
2. Точка D — основание высоты, проведённой из вершины A треугольника ABC . Пусть E и F — точки, симметричные D относительно прямых AB и AC соответственно. Также пусть R_1 и R_2 — соответственно радиусы описанных окружностей треугольников BDE и CDF , а r_1 и r_2 — радиусы вписанных окружностей этих же треугольников. Доказать, что

$$|S_{ABD} - S_{ACD}| \geq |R_1 r_1 - R_2 r_2|,$$

где S_K обозначает площадь фигуры K .

3. Пусть n — натуральное число, $n \geq 2$. Доказать, что если при каком-то положительном целом числе b число $\frac{b^n - 1}{b - 1}$ — степень простого числа, то n — простое число.



Отборочный конкурс на ММО'07

21–22 апреля 2007 г.

Второй день

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.

Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. Во внутренней области стороны BC квадрата $ABCD$ взята точка E , а во внутренней области стороны CD — точка F так, что перпендикуляр, опущенный из точки F на отрезок AE , проходит через точку пересечения G отрезка AE и диагонали BD . На отрезке FG выбрана точка K так, что $|AK| = |EF|$. Найти величину угла EKF .
5. Найти все непрерывные функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которые при любых действительных числах x и y удовлетворяют равенству

$$f(x + f(y)) = y + f(x + 1).$$

6. Дано клетчатое поле размерами 10×10 . Каждым ходом закрашивают четыре клетки, которые получены при пересечении каких-то двух горизонталей и двух вертикалей, причём по крайней мере одна из этих клеток должна быть до этого не закрашена. Каково *наибольшее* число ходов, которым можно закрасить всё клетчатое поле?