Отборочный конкурс на ММО'07

21–22 апреля 2007 г. **Первый день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. На пульте управления атомной станцией расположены в ряд n переключателей ($n > 0$), у каждого из которых возможны два положения: верхнее и нижнее. Переключатели соединены между собой таким образом, что всегда, когда какой-то переключатель передвигается из верхнего положения в нижнее, положение его правого соседа (в случае наличия такого) изменяется автоматически на противоположное. Вначале все переключатели в нижнем положении. Оператор пульта управления в первую очередь 1 раз изменяет положение самого левого переключателя, затем 2 раза второго слева переключателя и так далее, в конце изменяя n раз положение самого правого переключателя. Сколько переключателей будет в верхнем положении после всех этих операций?

2. Точка D — основание высоты, проведённой из вершины A треугольника ABC. Пусть E и F — точки, симметричные D относительно прямых AB и AC соответственно. Также пусть R_1 и R_2 — соответственно радиусы описанных окружностей треугольников BDE и CDF, а r_1 и r_2 — радиусы вписанных окружностей этих же треугольников. Доказать, что

$$|S_{ABD} - S_{ACD}| \geqslant |R_1 r_1 - R_2 r_2|,$$

где S_K обозначает площадь фигуры K.

3. Пусть n — натуральное число, $n \geqslant 2$. Доказать, что если при каком-то положительном целом числе b число $\dfrac{b^n - 1}{b - 1}$ — степень простого числа, то n — простое число.

Отборочный конкурс на ММО'07

21–22 апреля 2007 г. **Второй день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. Во внутренней области стороны BC квадрата $ABCD$ взята точка E, а во внутренней области стороны CD — точка F так, что перпендикуляр, опущенный из точки F на отрезок AE, проходит через точку пересечения G отрезка AE и диагонали BD. На отрезке FG выбрана точка K так, что $|AK| = |EF|$. Найти величину угла EKF.

5. Найти все непрерывные функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые при любых действительных числах x и y удовлетворяют равенству

$$f(x + f(y)) = y + f(x + 1).$$

6. Дано клетчатое поле размерами 10×10. Каждым ходом закрашивают четыре клетки, которые получены при пересечении каких-то двух горизонталей и двух вертикалей, причём по крайней мере одна из этих клеток должна быть до этого не закрашена. Каково *наибольшее* число ходов, которым можно закрасить всё клетчатое поле?