IMO'07 Eesti võistkonna valikvõistlus

21.–22. aprill 2007 **Esimene päev**

Lahendused

1. *Vastus:* 1.

Lahendus 1. Nummerdame lülitid vasakult paremale arvudega 1 kuni n. Kõigepealt tõestame, et kahe järjestikuse lülituse koosmõju ei sõltu sellest, kummas järjekorras lülitused sooritatakse. Tõepoolest, olgu x kahest lülitist vasakpoolsema ja y parempoolsema järjekorranumber.

- Kui leidub selline z, kus $x \leqslant z < y$, et lüliti z on all, siis saab lüliti x asendi muutmine mõjutada ainult lüliteid x kuni z, lüliti y asendi muutmine aga lülitit y ja temast paremal asuvaid lüliteid. Seega on nende kahe lülituse mõju teineteisest sõltumatu.
- Kui sellist z-i ei leidu, siis kutsub lüliti x asendi muutmine esile lüliti y liikumise. Pärast seda on lülitid x kuni $y-1$ all, kõik suurema numbriga lülitid aga samas asendis nagu siis, kui oleksime lüliti x asemel nihutanud lülitit y. Järelikult nii x kui ka y asendi muutmise järel on sõltumata muutmiste järjekorrast lülitid x kuni $y-1$ all ning suurema numbriga lülitid samas asendis, milles nad oleksid pärast lüliti y kahekordset liigutamist.

Tõestame nüüd, et ülesandes kirjeldatud operatsioonide tulemusel jääb üles parajasti vasakpoolseim lüliti. Väide ilmselt kehtib juhul $n = 1$. Eeldame, et väide kehtib n lüliti korral, ning vaatleme olukorda, kus lülitite arv on $n+1$. Ülaltoodu põhjal võib lülitusi sooritada suvalises järjekorras, lõpptulemus on sama. Muudame kõigepealt lüliti 2 asendit 1 kord, lüliti 3 asendit 2 korda jne kuni lüliti $n+1$ asendit n korda. Induktsiooni eelduse põhjal on nüüd lüliti 2 üleval ja kõik ülejäänud lülitid all. Seejärel muudame veel paremalt alates järjest iga lüliti asendit 1 kord. Sellega nihkuvad lülitid $n+1$ kuni 3 üles, lüliti 2 allavajutamine viib lülitid 3 kuni $n+1$ jälle tagasi alla ning lõpuks nihutame lüliti 1 üles.

Lahendus 2. Olgu a_i vasakult i-nda lüliti asendivahetuste arv protsessi vältel. Vastavalt ülesande tingimustele liigub iga lüliti parajasti juhtudel, kui operaator tema asendit muudab või kui eelmine lüliti liigub alla. Et alguses olid lülitid all, siis liigub i-s lüliti alla $\left[\frac{a_i}{2}\right]$ korda. Järelikult $i \geqslant 2$ korral alati $a_i = i + \left[\frac{a_{i-1}}{2}\right]$, samuti ilmselt $a_1 = 1$.

Tõestame induktsiooniga, et kui $i \geqslant 2$, siis $a_i = 2(i-1)$. Et $a_2 = 2 + \left[\frac{a_1}{2}\right] = 2 + \left[\frac{1}{2}\right] = 2$, siis juhul $i = 2$ väide kehtib. Eeldusel, et väide kehtib i korral, saame

$$a_{i+1} = i + 1 + \left[\frac{a_i}{2}\right] = i + 1 + \left[\frac{2(i-1)}{2}\right] = 2i$$

ehk väide kehtib ka $i+1$ korral.

Seega kokkuvõttes a_1 on paaritu ja iga $i \geqslant 2$ korral on a_i paaris. Seega on protsessi lõpus esimene lüliti üleval ja ülejäänud lülitid all.

Lahendus 3. Interpreteerime lülitite asendit kahendsüsteemi arvudena nii, et lüliti i asend tähistab arvu lõpust alates i-ndat numbrit: kui lüliti on all, siis see number on 0; kui üleval, siis 1. Lüliti i asendi muutmine vastab siis lihtsalt arvu 2^{i-1} juurdeliitmisele mooduli 2^n järgi. Alguses kodeerivad lülitite asendid arvu 0 ning meil on vaja sellele juurde liita arv $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + \ldots + n \cdot 2^{n-1}$ mooduli 2^n järgi.

Tõestame induktsiooniga, et $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + \ldots + n \cdot 2^{n-1} \equiv 1 \pmod{2^n}$. Juhul $n = 1$ saame $1 \equiv 1 \pmod 2$, mis kehtib. Eeldame, et väide kehtib juhul $n = k$. Korrutame kõiki liikmeid 2-ga:

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + k \cdot 2^k \equiv 2 \pmod{2^{k+1}}.$$

Liites tulemuse mõlemale poolele arvu $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$, saame

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + (k+1) \cdot 2^k \equiv 2 + 2^{k+1} - 1 \equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$$

ehk väide kehtib ka juhul $n = k + 1$.

Märkus. Ülesannet on võimalik lahendada ka nii, et tõestada induktsiooniga võrdus $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + \ldots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1$ ja järeldada sellest lahenduses 3 tõestatud kongruents.

2. *Lahendus 1.* Vaatleme esmalt juhtu, kus aluspunkt D asub punktide B ja C vahel (joonis 1). Et $S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |BD|$ ja $S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |CD|$, siis

$$S_{ABD} - S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot (|BD| - |CD|).$$

Olgu G kolmnurga BDE siseringjoone keskpunkt ja G' punktist G lõigule BD tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Siis ilmselt $|GG'| = r_1$. Sümmeetria tõttu $\angle BEA = \angle BDA = 90^\circ$, seega on $BEAD$ kõõlnelinurk ja lõik AB on tema ümberringjoone diameeter. Järelikult $|AB| = 2R_1$. Et kolmnurgad ADB ja $GG'B$ on sarnased, siis $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|GB|}{|GG'|}$, millest $|AB| \cdot |GG'| = |AD| \cdot |GB|$ ehk

$2R_1 r_1 = |AD| \cdot |GB|$. Analoogiliselt saame kolmnurga CDF siseringjoone keskpunkti H puhul $2R_2 r_2 = |AD| \cdot |HC|$. Järelikult

$$R_1 r_1 - R_2 r_2 = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot (|GB| - |HC|).$$

Edasi, kolmnurk ADG on võrdhaarne, sest $\angle ADG = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BDE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DAG$ ning $\angle AGD = 180^\circ - \angle DAG - \angle ADG = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DAG$. Järelikult $|AD| = |AG|$. Analoogiliselt $|AD| = |AH|$. Seega $|AG| = |AH|$. Täisnurksetest kolmnurkadest ABD ja ACD saame Pythagorase teoreemi põhjal $|AD|^2 + |BD|^2 = |AB|^2$ ja $|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2$. Lahutades esimesest võrdusest teise, tekib võrdus $|BD|^2 - |CD|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$ ehk $\big(|BD| - |CD|\big) \cdot \big(|BD| + |CD|\big) = \big(|AB| - |AC|\big) \cdot \big(|AB| + |AC|\big)$, millest

$$\big||BD| - |CD|\big| \cdot |BC| = \big||GB| - |HC|\big| \cdot \big(|AB| + |AC|\big).$$

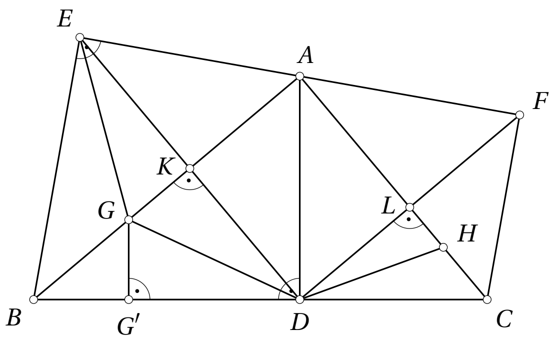
Et siin kolmnurgavõrratuse põhjal $|BC| < |AB| + |AC|$, siis peab olema $\big||BD| - |CD|\big| \geqslant \big||GB| - |HC|\big|$, millest saamegi tõestatava võrratuse.

Kui kõrguse aluspunkt D ei asu punktide B ja C vahel (joonis 2), näiteks asub kiirel BC, siis peegeldame lõiku AC kõrguse AD suhtes, millega punktid C ja H teisenevad vastavalt teatavateks punktideks C' ja H'. Nüüd saame rakendada eelnevat lahenduskäiku kolmnurgale ABC' ning ülesande väide järeldub asjaolust, et $|C'D| = |CD|$ ja $|H'C'| = |HC|$.

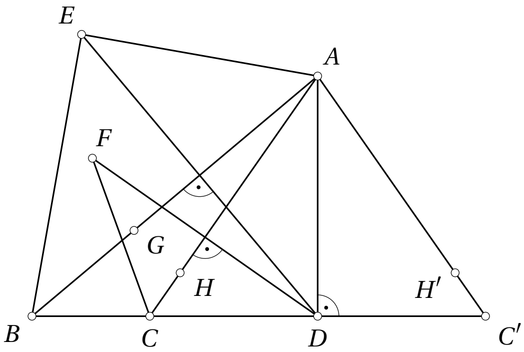
Lahendus 2. Olgu $\angle BAD = \beta$ ja $\angle CAD = \gamma$. Siis

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |BD| = \frac{1}{2}|AD|^2 \tan\beta.$$

Nagu eelmises lahenduses näitame, et $BEAD$ on kõõlnelinurk. Olgu K tema diagonaalide lõikepunkt. Et $R_1 = \frac{|AB|}{2}$, siis $R_1 = \frac{|AD|}{2\cos\beta}$. Peale selle



Joonis 1



Joonis 2

$r_1 = |GK|$ ning $\angle GDK = \dfrac{\angle BDE}{2} = \dfrac{\angle BAD}{2} = \dfrac{\beta}{2}$. Seega $r_1 = |DK| \tan \dfrac{\beta}{2} = |AD| \sin\beta \tan\dfrac{\beta}{2}$. Järelikult

$$R_1 r_1 = \frac{|AD|}{2\cos\beta} \cdot |AD| \sin\beta \tan\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} |AD|^2 \tan\beta \tan\frac{\beta}{2}.$$

Analoogiliselt leiame

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} |AD|^2 \tan\gamma, \qquad R_2 r_2 = \frac{1}{2} |AD|^2 \tan\gamma \tan\frac{\gamma}{2}.$$

Saadud avaldistest näeme, et $S_{ABD} - S_{ACD}$ ja $R_1 r_1 - R_2 r_2$ on sama märgiga, sest nurgad β ja γ kuuluvad esimesse veerandisse, kus tangens on kasvav. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et mõlemad avaldised on mittenegatiivsed (vastasel korral vahetame tipud B ja C). Sel juhul $\beta \geqslant \gamma$ ning ülesande võrratus on samaväärne võrratusega $S_{ABD} - R_1 r_1 \geqslant S_{ACD} - R_2 r_2$. Nüüd

$$S_{ABD} - R_1 r_1 = \frac{1}{2} |AD|^2 \tan\beta \left(1 - \tan\frac{\beta}{2}\right) = \\ = \frac{1}{2} |AD|^2 \frac{2\tan\dfrac{\beta}{2}}{1 - \tan^2\dfrac{\beta}{2}} \left(1 - \tan\frac{\beta}{2}\right) = |AD|^2 \frac{\tan\dfrac{\beta}{2}}{1 + \tan\dfrac{\beta}{2}},$$

millest

$$S_{ABD} - R_1 r_1 = |AD|^2 \left(1 - \frac{1}{1 + \tan\dfrac{\beta}{2}}\right)$$

ning analoogiliselt

$$S_{ACD} - R_2 r_2 = |AD|^2 \left(1 - \frac{1}{1 + \tan\dfrac{\gamma}{2}}\right).$$

Et tangens on esimeses veerandis kasvav, siis juhul $\beta \geqslant \gamma$ kehtib võrratus $S_{ABD} - R_1 r_1 \geqslant S_{ACD} - R_2 r_2$.

3. Ilmselt $b \geqslant 2$. Eeldame, et $\dfrac{b^n - 1}{b - 1} = p^l$, kus p on algarv, siis $n \geqslant 2$ tõttu $l \geqslant 1$. Kui n avaldub kujul $n = xy$, kus x ja y on ühest suuremad naturaalarvud, siis vaatleme esitust

$$\frac{b^{xy} - 1}{b - 1} = \frac{b^{xy} - 1}{b^y - 1} \cdot \frac{b^y - 1}{b - 1} = (1 + b^y + \ldots + b^{y(x-1)}) \cdot \frac{b^y - 1}{b - 1}.$$

Viimases korrutises on mõlemad tegurid p astmed, sest vaadeldav arv ise on p aste. Et x ja y on mõlemad 1-st suuremad, siis jaguvad mõlemad tegurid p-ga. Teises teguris jagub siis $b^y - 1$ samuti p-ga, mistõttu esimeses teguris annavad kõik liikmed sulgudes p-ga jagades jäägi 1 ehk esimene tegur annab sama jäägi nagu arv $1 + 1 + \ldots + 1 = x$. Järelikult x jagub p-ga. Seega jagub arvu n iga ühest suurem tegur p-ga, mis on võimalik ainult juhul, kui $n = p^m$ mingi positiivse täisarvu m korral.

Vaatleme esitust

$$\frac{b^{p^m} - 1}{b - 1} = \frac{b^{p^m} - 1}{b^{p^{m-1}} - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{b^{p^2} - 1}{b^p - 1} \cdot \frac{b^p - 1}{b - 1}.$$

Et vasak pool on eelduse järgi p positiivses astmes, siis on ka tema tegur $\dfrac{b^p - 1}{b - 1}$ arv p positiivses astmes. Seega jagub viimase murru lugeja p-ga ehk b^p annab jagamisel p-ga jäägi 1. Fermat' väikese teoreemi põhjal annab b^p jagamisel p-ga sama jäägi nagu b. Järelikult $b - 1$ jagub p-ga. Siis aga peab murru lugeja $b^p - 1$ jaguma vähemalt arvuga p^2 ehk b^p annab p^2-ga jagamisel jäägi 1. Kui nüüd arvu $n = p^m$ puhul oleks $m \geqslant 2$, siis kuulub ülaltoodud esitusse ka tegur $\dfrac{b^{p^2} - 1}{b^p - 1} = 1 + b^p + \ldots + b^{p(p-1)}$. See annab ühelt poolt p^2-ga jagades jäägi $1 + 1 + \ldots + 1 = p$. Teiselt poolt on see tegur p aste ühest suurema astendajaga, sest b^p peab olema suurem kui p, ning ta annab p^2-ga jagades jäägi 0. See vastuolu näitab, et $m = 1$.

Märkus 1. Lahenduse lõpuosas pole Fermat' väikese teoreemi kasutamine tingimata vajalik. Kui oletada, et juhul $m \geqslant 2$ annab b^p jagamisel p^2-ga jäägi 1, siis saame eelnevaga analoogiliselt vastuolu, et $\dfrac{b^{p^2} - 1}{b^p - 1}$ annab p^2-ga jagamisel ühelt poolt jäägi p ning teiselt poolt jäägi 0. Järelikult juhul

$m \geqslant 2$ jagub tegur $\dfrac{b^p - 1}{b - 1}$ arvuga p, aga mitte arvuga p^2. Et see tegur on p aste, siis ainsa võimalusena $\dfrac{b^p - 1}{b - 1} = p$. Samas aga

$$\frac{b^p - 1}{b - 1} = 1 + b + \ldots + b^{p-1} > b^{p-1} \geqslant 2^{p-1} \geqslant p.$$

Märkus 2. Erijuhul $b = 2$ ja $l = 1$ taandub ülesanne üldtuntud väiteks, et kui Mersenne'i arv M_n on algarv, siis n on samuti algarv.

Lahendused

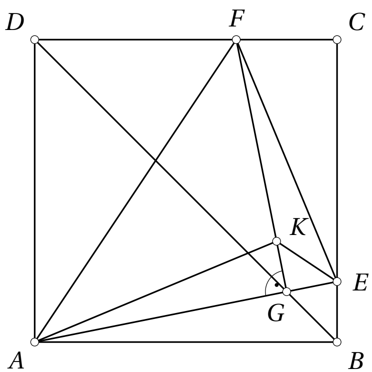
4. *Vastus:* 135°.

Nelinurk $AGFD$ on kõõlnelinurk, sest $\angle AGF = \angle ADF = 90^\circ$ (joonis 3). Järelikult $\angle GAF = \angle GDF = 45^\circ$ ja $\angle GFA = \angle GDA = 45^\circ$. Seega on kolmnurk AGF võrdhaarne ning $|GA| = |GF|$. Nüüd saame, et täisnurksed kolmnurgad AGK ja FGE on võrdsed, sest neil on võrdsed hüpotenuusid ja üks paar võrdseid kaateteid. Järelikult $|GK| = |GE|$, mistõttu täisnurkne kolmnurk GKE on võrdhaarne ja $\angle GKE = 45^\circ$. Seega $\angle EKF = 180^\circ - \angle GKE = 135^\circ$.

5. *Vastus:* $f(x) = 1 + x$ ja $f(x) = 1 - x$.

Olgu a reaalarv, mille korral $f(a) = 0$. Selline reaalarv leidub, sest võttes antud võrrandis $y = -f(x+1)$, näeme, et funktsiooni f väärtus teataval kohal on 0. Edasi vaatleme kahte juhtu.

Olgu $a \neq 1$. Valime algses võrrandis $y = x + 1$, saame $f(x + f(x+1)) = x + 1 + f(x+1)$. Defineerime funktsiooni $g(x) = x + f(x+1)$, siis võime saadud võrduse kirjutada kujul $f(g(x)) = 1 + g(x)$, mis kehtib iga x korral. Funktsiooni f pidevuse tõttu on ka g pidev. Valides nüüd algses võrrandis $y = a$, saame $f(x) = a + f(x+1)$ ehk $f(x) - f(x+1) = a$. Siit järeldub $g(x-1) - g(x) = a - 1$ iga x korral. Et $a \neq 1$, siis omandab funktsioon g kui tahes suuri ja kui tahes väikesi väärtusi, pidevuse tõttu omandab ta siis üldse kõiki väärtusi. Järelikult $f(z) = 1 + z$ iga z korral.



Joonis 3

Olgu $a = 1$. Siis $f(1) = 0$. Valime algses võrrandis $x = 0$, saame $f(f(y)) = y$ iga reaalarvu y korral. Seejärel valime algses võrrandis $y = f(1-x)$, saame $f(x + f(f(1-x))) = f(1-x) + f(x+1)$ ehk $0 = f(1-x) + f(x+1)$. Lõpuks valime algses võrrandis $y = 1 - x$, saame $f(x + f(1-x)) = 1 - x + f(x+1)$ ehk eelneva põhjal $f(x + f(1-x)) = 1 - x - f(1-x)$. Defineerime funktsiooni $h(x) = x + f(1-x)$, siis võime saadud võrduse kirjutada kujul $f(h(x)) = 1 - h(x)$, mis kehtib iga x korral. Funktsioon h on pidev. Valides algses võrrandis x asemel $-x$ ja $y = 1$, saame $f(-x) = 1 + f(1-x)$ ehk $f(-x) - f(1-x) = 1$, millest järeldub $h(x+1) - h(x) = 2$. Pidevuse tõttu omandab funktsioon h kõiki väärtusi, järelikult $f(z) = 1 - z$ iga z korral.

Kontroll näitab, et mõlemad leitud funktsioonid rahuldavad ülesande tingimusi.

6. *Vastus:* 81.

Kui kõigil käikudel valime esimese horisontaali ja esimese vertikaali ning ülejäänud liinid nii, et nende lõikeruut läbib järjestikku ülejäänud 9×9 ruudustiku kõik ruudud, siis saame ruudustiku ära värvida 81 käiguga.

Näitame, et see arv on maksimaalne. Vaatleme mingit käikude jada. Iga käigu jaoks märgime ära ühe ruutudest, mis värvitakse esmakordselt just sellel käigul. Värvime nüüd ruudustikus kõik märkimata jäänud ruudud. Kui läbida vaadeldav käikude jada sellel ruudustikul, siis värvitakse iga kord täpselt üks ruut, sest ülejäänud sellel käigul vaadeldavad ruudud on värvitud juba kas mingil varasemal käigul või siis kohe alguses.

Moodustame 20-tipulise graafi, mille tippudeks on ruudustiku kõik horisontaalid ja vertikaalid. Värvides mingi ruudu, ühendame omavahel selle ruudu horisontaalile ja vertikaalile vastavad tipud. Servad, mis vastavad märkimata jäänud ruutudele, lisame graafile kohe alguses, igal käigul lisandub graafile siis täpselt üks uus serv. Paneme tähele, et igal käigul ühendatakse servaga alati kaks sellist tippu, mida juba ühendab servade ahel. Tõepoolest, kui käigu tegemiseks on valitud horisontaalid a ja b ning vertikaalid c ja d, kusjuures värvime ruudu (b, d), siis on tipud b ja d omavahel ühendatud ahelaga $b - c - a - d$. Seetõttu peavad servad, mis lisati graafile kohe alguses, olema sellised, et neid mööda pääseb graafi igast tipust igasse teise tippu – vastasel korral peaksime mingil käigul ühendama kaks tippu, mis ei ole omavahel ühendatud eelmainitud ahelaga. Et tippe on 20, peab servi olema alguses vähemalt 19. Järelikult uusi servi ja ka käike saab olla maksimaalselt $100 - 19 = 81$.