

IMO'07 Eesti võistkonna valikvõistlus

21.–22. aprill 2007

Esimene päev

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

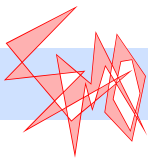
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Tuumajaama juhtimispuldil asub ühes reas n lüliti ($n > 0$), millest igaühel on kaks võimalikku asendit: üleval või all. Lülitid on omavahel ühenduses nii, et alati, kui mõni lüliti liigub ülemisest asendist alumisse, muutub tema parempoolse naabri (kui see on olemas) asend automaatselt vastupidiseks. Esialgu on kõik lülitid all. Juhtimispuldi operaator muudab kõigepealt vasakpoolseima lüliti asendit 1 kord, siis vasakult teise lüliti asendit 2 korda jne kuni lõpuks parempoolseima lüliti asendit n korda. Mitu lüliti on nende operatsioonide järel üleval?
2. Kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt on D . Olgu E ja F punktiga D sümmeetrilised punktid vastavalt sirgete AB ja AC suhtes. Lisaks olgu R_1 ja R_2 vastavalt kolmnurkade BDE ja CDF ümberringjoonte raadiused ning r_1 ja r_2 samade kolmnurkade siseringjoonte raadiused. Tõesta, et

$$|S_{ABD} - S_{ACD}| \geq |R_1 r_1 - R_2 r_2|,$$

kus S_K tähistab kujundi K pindala.

3. Olgu n naturaalarv, $n \geq 2$. Tõesta, et kui mingi positiivse täisarvu b korral on arv $\frac{b^n - 1}{b - 1}$ algarvu aste, siis n on algarv.



IMO'07 Eesti võistkonna valikvõistlus

21.–22. aprill 2007

Teine päev

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

4. Ruudu $ABCD$ külje BC sisepiirkonnas on võetud punkt E ja külje CD sisepiirkonnas punkt F nii, et punktist F lõigule AE tõmmatud ristsirge läbib lõigu AE ja diagonaali BD lõikepunkti G . Lõigul FG on valitud punkt K nii, et $|AK| = |EF|$. Leia nurga EKF suurus.
5. Leia kõik pidevad funktsioonid $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis rahuldavad suvaliste reaalarvude x ja y korral võrdust

$$f(x + f(y)) = y + f(x + 1).$$

6. Antud on ruudustik mõõtmetega 10×10 . Igal käigul värvitakse neli ühikruutu, mis on saadud mingi kahe horisontaali ja kahe vertikaali lõikumisel, kusjuures vähemalt üks neist ruutudest peab olema seni värvimata. Milline on suurim käikude arv, millega saab ära värvida kogu ruudustiku?