2007. aasta valikvõistluse 6. ülesandest

2007. aasta Eesti IMO-võistkonna valikvõistluse 6. ülesanne kõlas järgmiselt:

> Antud on ruudustik mõõtmetega 10×10. Igal käigul värvitakse neli ühikruutu, mis on saadud mingi kahe horisontaali ja kahe vertikaali lõikumisel, kusjuures vähemalt üks neist ruutudest peab olema seni värvimata. Milline on suurim käikude arv, millega saab ära värvida kogu ruudustiku?

Enamus lahendajaid sai kätte õige vastuse 81, kuid jäi jänni selle vastuse korrektse põhjendamisega. Seepärast vaatlemegi lähemalt mõnesid tüüpilisi vigaseid lahendusi ja arutleme, miks nad korrektsed ei ole.

Maksimumi leidmise ülesande lahendus peab loomulikult koosnema kahest osast – ühest, kus näidatakse, et soovitud maksimum on saavutatav, ja teisest, kus näidatakse, et rohkem saavutada pole võimalik. Esimeses osas leiti tüüpiliselt kaks konstruktsiooni, mida illustreerib alljärgnev joonis. Joonisel on märgitud esimestel käikudel värvitavad uued ruudud seni kuni korraga värvitakse enam kui üks uus ruut; ülejäänud uued ruudud saab värvida ühekaupa.

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	10								
11	11								
12	12								
13	13								
14	14								
15	15								
16	16								
17	17								

1	1								
1	1	6							
	6	2	2						
		2	2	7					
			7	3	3				
				3	3	8			
					8	4	4		
						4	4	9	
							9	5	5
								5	5

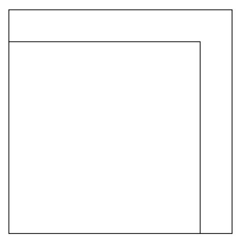
Kuidas aga näidata, et suuremat arvu käike teha ei saa? Enamus lahendajaid üritas kasutada mõtteviisi "värvime igal käigul võimalikult vähe seni värvimata ruute". On lihtne näha, et nii käitudes tuleb esimesel käigul värvida 4, järgmisel 16-l käigul 2 ja viimasel 64-l käigul 1 ruut. Tulemuseks on joonisel vasakul pool toodud konstruktsioon.

Samas – miks ei võiks ikkagi alguses rohkem korraga värvida? Joonisel paremal pool toodud konstruktsioon näitab, et lausa esimesel viiel käigul võib iga kord võtta 4 uut ruutu ja selle arvel saab hiljem teha suurema koguse (64 asemel 72) niisuguseid käike, mis kasutavad ainult üht seni värvimata ruutudest. Muidugi ei tähenda see, et ka joonisel paremal toodud konstruktsioon tagaks tingimata käikude arvu maksimumi. Võibolla on kasulikum mingil käigul võtta hoopis 3 seni värvimata ruutu?

Kokkuvõttes võib öelda, et tõestus, kus üritatakse kogu protsessi maksimumi saavutada käikude ühekaupa optimeerimisega, ei saa kindlasti olla lihtne, sest kuidagimoodi tuleb läbi vaadata kõik võimalikud käikudevalikud ja nende arv läheb niisuguse lähenemise korral liiga suureks.

Teine ebaõnnestunud lahenduskatse, mis ka mõnedes töödes esines, kasutas induktsiooni. On lihtne näha, et 2×2 ruudus saab teha vaid 1 käigu ja väikese rehkenduse järel võib veenduda, et 3×3 ruudus ei saa teha üle 4 käigu. See viib loomuliku (ja tegelikult õige) hüpoteesini, et $n \times n$ ruudustiku korral on suurim käikude arv $(n-1)^2$. Kuidas aga läbi viia induktsiooni sammu?

Lihtsaim viis minna $n \times n$ ruudult üle $(n+1) \times (n+1)$ ruudule on kahte serva riba ruute juurde panna (vt joonist).



Lihtne on aru saada, et õnnestub teha ülimalt $2n-1$ käiku, mis värvivad veel värvimata ruute lisandunud ribast. Lisades siia juurde induktsiooni eeldusest tuleneva väite, et vana $n \times n$ ruudu katmiseks kulub ülimalt $(n-1)^2$ sammu, saamegi suures ruudus teha kokku ülimalt

$$(n-1)^2 + 2n - 1 = n^2$$

sammu.

Kus peitub toodud arutluskäigu viga? Asi seisneb selles, et pärast uue riba äravärvimist võib teha ka käike, mis katavad üle osa ribaruute ja värvivad vanast $n \times n$ ruudust ainult mõne uue ruudu. Seega saame sisuliselt $n \times n$ ruudu värvimiseks teha veel teistsuguseid käike peale ülesandes lubatute ja järelikult ei saa induktsiooni eeldust kasutada.