Valikvõistlus 2006

IMO'06 Eesti võistkonna valikvõistlus

5.–6. aprill 2006 **Esimene päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

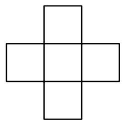
1. Olgu k suvaline fikseeritud positiivne täisarv. Vaatleme täisarvupaare (a, b), mille korral ruutvõrranditel $x^2 - 2ax + b = 0$ ja $y^2 + 2ay + b = 0$ leiduvad reaalarvulised lahendid (mitte tingimata erinevad), mida võib märkida vastavalt tähistega x_1, x_2 ja y_1, y_2 sellises järjekorras, et kehtib võrdus $x_1y_1 - x_2y_2 = 4k$.

a) Leia sellise arvupaari (a, b) teise komponendi b suurim võimalik väärtus.

b) Leia kõigi selliste arvupaaride teiste komponentide summa.

2. Teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt on O. Sirge AO lõikab külge BC punktis D. Kolmnurga külgedel AB ja AC valitakse vastavalt punktid E ja F nii, et punktid A, E, D, F asuvad ühel ringjoonel. Olgu E' ja F' vastavalt punktidest E ja F küljele BC tõmmatud ristlõikude aluspunktid. Tõesta, et lõigu $E'F'$ pikkus ei sõltu punktide E ja F asendist.

3. Antud on ruudustik mõõtmetega 10×11. Kui palju saab maksimaalselt ruudustikule paigutada viit ühikruutu katvaid „riste“ (joonisel paremal), nii et ükski kaks neist ei kataks sama ruutu?



IMO'06 Eesti võistkonna valikvõistlus

5.–6. aprill 2006 **Teine päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

4. Teravnurkse kolmnurga ABC külg AC on diameetriks ringjoonele c_1 ja külg BC on diameetriks ringjoonele c_2. Olgu E kolmnurga tipust B tõmmatud kõrguse aluspunkt ja F tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt. Lisaks olgu L ja N sirge BE lõikepunktid ringjoonega c_1 (punkt L asub lõigul BE) ning K ja M sirge AF lõikepunktid ringjoonega c_2 (punkt K asub lõigul AF). Tõesta, et $KLMN$ on kõõlnelinurk.

5. Olgu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ positiivsete reaalarvude jada. Tõesta, et suvalise positiivse täisarvu n korral kehtib võrratus

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 4 \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

kus b_i on arvude $a_1, a_2, \ldots, a_i$ aritmeetiline keskmine.

6. Tähistagu $d(n)$ positiivse täisarvu n positiivsete jagajate arvu. Positiivset täisarvu n nimetatakse *ülijaguvaks*, kui kõigi positiivsete täisarvude $m < n$ korral $d(m) < d(n)$. Kahte ülijaguvat täisarvu m ja n nimetatakse järjestikusteks, kui $m < n$ ja ei leidu ülijaguvat täisarvu s nii, et $m < s < n$. Tõesta, et kõigi selliste järjestikuste ülijaguvate täisarvude paaride (a, b) hulk, mille korral arv b jagub arvuga a, on lõplik.

Отборочный конкурс в команду Эстонии на ММО’06

5–6 апреля 2006 г. **Первый день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

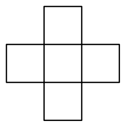
1. Пусть k — произвольное фиксированное положительное целое число. Рассмотрим пары целых чисел (a, b), при которых квадратные уравнения $x^2 - 2ax + b = 0$ и $y^2 + 2ay + b = 0$ имеют решения в действительных числах (не обязательно различные), которые можно обозначить x_1, x_2 и y_1, y_2 соответственно в таком порядке, что выполняется равенство $x_1 y_1 - x_2 y_2 = 4k$.

а) Найти наибольшее возможное значение второй компоненты b в такой паре (a, b).

б) Найти сумму вторых компонент всех таких пар.

2. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая AO пересекает сторону BC в точке D. На сторонах AB и AC выбираются такие точки E и F, соответственно, что точки A, E, D, F лежат на одной окружности. Пусть E' и F' — точки падения, опущенных из точек E и F, соответственно, перпендикуляров на сторону BC. Доказать, что длина отрезка $E'F'$ не зависит от расположения точек E и F.

3. Дан клетчатое поле размером 10×11. Найти максимальное количество „крестиков“ (на рисунке справа), покрывающих пять клеток, которое возможно разместить на поле так, чтобы никакие два из „крестиков“ не покрывали одну клетку.



Отборочный конкурс в команду Эстонии на ММО'06

5–6 апреля 2006 г. **Второй день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. Сторона AC остроугольного треугольника ABC является диаметром окружности c_1, а сторона BC — диаметром окружности c_2. Пусть E — точка падения высоты опущенной из вершины B треугольника, а F — точка падения высоты опущенной из вершины A. Кроме того, пусть L и N точки пересечения прямой BE с окружностью c_1 (точка L лежит на отрезке BE), и K и M точки пересечения прямой AF с окружностью c_2 (точка K лежит на отрезке AF). Доказать, что $KLMN$ является вписанным четырёхугольником.

5. Пусть a_1, a_2, a_3, ... — последовательность положительных действительных чисел. Доказать, что для любого положительного целого числа n выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 4 \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

где b_i является арифметическим среднем чисел $a_1, a_2, \ldots, a_i$.

6. Обозначим через $d(n)$ число положительных делителей положительного целого числа n. Положительное целое число n называется *сверхделимым*, если для всех положительных целых чисел $m < n$ выполняется $d(m) < d(n)$. Два сверхделимых целых числа m и n называют последовательными, если $m < n$ и не существует сверхделимого целого числа s такого, что $m < s < n$. Доказать, что множество всех пар (a, b) последовательных сверхделимых целых чисел, таких что число b делится на число a, является конечным.

Esimene päev

1. *Vastus:* a) $k^2 - 1$; b) 0.

Kirjutades võrrandid kujul $(x-a)^2 = a^2 - b$ ja $(y+a)^2 = a^2 - b$, näeme, et nende lahendid on reaalarvulised parajasti siis, kui $a^2 - b \geqslant 0$; ruutvõrrandite lahendid on

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= a \pm \sqrt{a^2 - b}, \\ y_{1,2} &= -a \pm \sqrt{a^2 - b}. \end{aligned}$$

Leiame avaldise $x_1 y_1 - x_2 y_2$ võimalikud väärtused. Olgu $x_1 = a + \varepsilon\sqrt{s^2 - b}$ ja $y_1 = -a + \delta\sqrt{a^2 - b}$, kus kordajad ε ja δ on mingid arvud hulgast $\{-1, 1\}$. Siis $x_2 = a - \varepsilon\sqrt{a^2 - b}$ ja $y_2 = -a - \delta\sqrt{a^2 - b}$. Tähistades lühiduse mõttes $\sqrt{a^2 - b} = c$, leiame

$$\begin{aligned} x_1 y_1 - x_2 y_2 &= (a + \varepsilon c)(-a + \delta c) - (a - \varepsilon c)(-a - \delta c) = \\ &= (-a^2 - \varepsilon ac + \delta ac + \varepsilon\delta c^2) - (-a^2 + \varepsilon ac - \delta ac + \varepsilon\delta c^2) = \\ &= -2a(\varepsilon - \delta)c. \end{aligned}$$

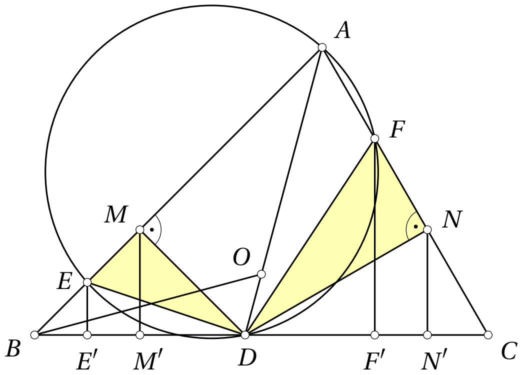
Et $\varepsilon - \delta$ omandab ainult väärtusi -2, 0 ja 2, siis saavad avaldise $x_1 y_1 - x_2 y_2$ võimalikud väärtused olla parajasti $4a\sqrt{a^2 - b}$, 0 ja $-4a\sqrt{a^2 - b}$. Võrdus $x_1 y_1 - x_2 y_2 = 4k$ kehtib seega parajasti siis, kui $4k$ on võrdne ühega nendest arvudest. Et k on positiivne, siis $k \neq 0$. Järelikult

$$k = |a|\sqrt{a^2 - b}.$$

Viimane võrdus esitab arvu k kahe teguri korrutisena, kumbki neist peab olema täisarv, sest ruutjuur täisarvust saab olla ainult kas täisarv või irratsionaalarv. Vaadeldavat võrdust rahuldavad seega parajasti kõik need arvupaarid (a, b), mida on võimalik saada järgmisel viisil: esitame arvu k kahe positiivse täisarvu korrutisena $k = mn$ ning määrame võrduste $|a| = m$ ja $\sqrt{a^2 - b} = n$ abil

$$a = \pm m, \qquad b = m^2 - n^2.$$

Ülesande a)-osa lahendamiseks paneme tähele, et igas esituses $k = mn$ peab olema $m \leqslant k$ ja $n \geqslant 1$. Eelnevatest võrranditest saame $b \leqslant k^2 - 1$, kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $m = k$ ja $n = 1$. Arvu b maksimaalne väärtus on järelikult $k^2 - 1$.



Joonis 1

Ülesande b)-osa lahendamiseks tuleb leida kõigi paaride (a, b) teiste komponentide summa üle kõigi selliste arvupaaride (m, n), kus $mn = k$. Kui $m = n$, siis ilmselt $b = 0$. Kui $m \neq n$, siis vaatleme paare (m, n) ja (n, m). Neile vastavate paaride (a, b) teiste komponentide b summa on $(m^2-n^2)+(n^2-m^2) = 0$, sõltumata esimese komponendi a märgist. Otsitav summa on seega 0.

2. Olgu M ja N punktist D vastavalt külgedele AB ja AC tõmmatud ristlõikude aluspunktid (joonis 1) ning M' ja N' vastavalt punktidest M ja N küljele BC tõmmatud ristlõikude aluspunktid. Piisab tõestada, et $|E'F'| = |M'N'|$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et punkt E asub lõigul BM ehk $\angle AED < 90^\circ$. Et punktid A, E, D, F asuvad ühel ringjoonel, siis $\angle DFC = \angle AED < 90^\circ$, seega F asub lõigul AN. Järelikult piisab tõestada, et $|E'M'| = |F'N'|$. Siin on $|E'M'| = |EM| \cos \angle B$ ja $|F'N'| = |FN| \cos \angle C$. Seega tuleb näidata, et $|EM| \cos \angle B = |FN| \cos \angle C$ ehk

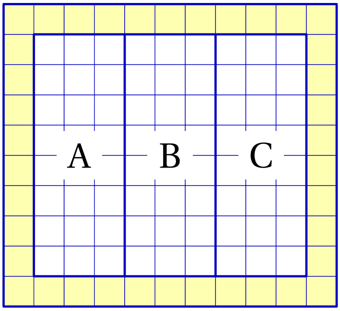
$$\frac{|EM|}{|FN|} = \frac{\cos \angle C}{\cos \angle B}.$$

Tõestame viimase võrduse. Et $\angle MED = \angle NFD$, siis on täisnurksed kolmnurgad EMD ja NFD sarnased, mistõttu

$$\frac{|EM|}{|FN|} = \frac{|MD|}{|ND|}.$$

Täisnurksest kolmnurgast AMD saame $|MD| = |AD| \sin \angle DAB$, täisnurksest kolmnurgast AND aga $|ND| = |AD| \sin \angle DAC$. Seega

$$\frac{|EM|}{|FN|} = \frac{\sin \angle DAB}{\sin \angle DAC}.$$



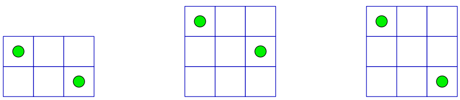
Joonis 2

Et O on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt, siis $\angle AOB = 2\angle C$. Võrdhaarsest kolmnurgast OAB saame nüüd $\angle DAB = 90^\circ - \angle C$ ehk $\sin\angle DAB = \cos\angle C$. Analoogiliselt $\sin\angle DAC = \cos\angle B$. Asetades need tulemused viimasesse jagatisse, jõuamegi vajaliku võrduseni.

3. *Vastus:* 15.

Tõestame, et 10×11 ruudustikule ei saa paigutada 16 „risti“. Oletame väitevastaselt, et see on võimalik. „Ristide“ asemel vaatleme nende keskpunkte, need peavad asuma keskmises 8×9 ristkülikus (joonis 2). Jagame selle keskmise ristküliku kolmeks 8×3 ristkülikuks A, B ja C ning uurime keskpunktide võimalikku arvu nendest kolmes osas.

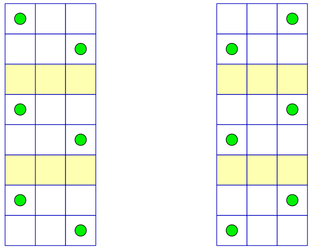
Lihtne on näha, et 2×3 ja 3×3 ristkülikule saab paigutada maksimaalselt kaks keskpunkti (joonis 3). Ühe 8×3 osaristküliku saab tükeldada kaheks 3×3 ristkülikuks ning nende vahel asuvaks 2×3 ristkülikuks. Seega saab 8×3 ristkülikult paigutada ülimalt 6 keskpunkti, igale tükile täpselt kaks. Et keskmisel 2×3 ristkülikul asub kaks keskpunkti, siis ei saa 8×3 ristküliku kolmandas ja kuuendas reas asuda ühtegi keskpunkti. Seega on võimalikud ainult kaks sümmeetrilist paigutust, mis on kujutatud joonisel 4.



Joonis 3

Et kolmel 8×3 ristkülikul asub ühtekokku 16 keskpunkti ja ühelegi neist ei saa paigutada üle 6 keskpunkti, siis peab leiduma ristkülik, millel on täpselt 6 keskpunkti.

- Kui ristkülik B sisaldab 6 keskpunkti, siis võime sümmeetria tõttu eeldada, et nad asuvad nagu joonisel 5. Lihtne on veenduda, et 8×9



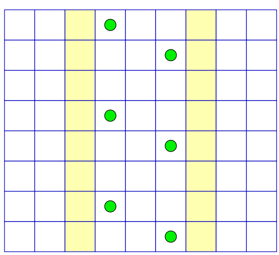
Joonis 4

ristküliku kolmandas ja seitsmendas veerus ei saa olla ühtegi keskpunkti. Siis aga saame ristkülikule A paigutada ülimalt 4 keskpunkti ning ristkülikult C samuti ülimalt 4, kokku tervele ruudustikule ülimalt $4 + 6 + 4 = 14$ keskpunkti, mis on vastuolus eeldusega, et keskpunkte on 16.

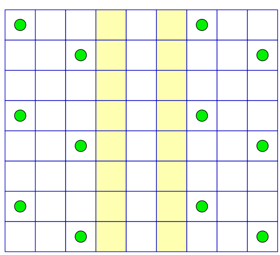
- Kui ristkülikud A ja C sisaldavad mõlemad 6 keskpunkti, siis võime eeldada, et need asuvad nagu joonisel 6. Siis ei saa olla ühtegi keskpunkti 8×9 ristküliku neljandas ja kuuendas veerus. Järelikult saab ristkülikule B keskpunkte paigutada ülimalt 3 ning kogu lauale ülimalt $6 + 3 + 6 = 15$, jällegi vastuolu.
- Kui täpselt üks ristkülikutest A ja C sisaldab 6 keskpunkti, siis võime eeldada, et ristkülik A sisaldab 6 ja ristkülik C sisaldab ülimalt 5 keskpunkti (joonis 7). Siis ei saa 8×9 ristküliku neljandas veerus asuda ühtegi keskpunkti, mistõttu ristkülik B sisaldab ülimalt 4 keskpunkti. Sel juhul saab kogu laual asuda ülimalt $6 + 4 + 5 = 15$ keskpunkti, samuti vastuolu.

Järelikult ei ole võimalik paigutada antud lauale 16 keskpunkti

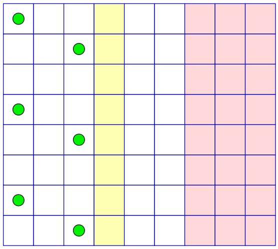
Seevastu 15 keskpunkti saab lauale paigutada, nagu nähtub joonisel 8 või joonisel 9.



Joonis 5

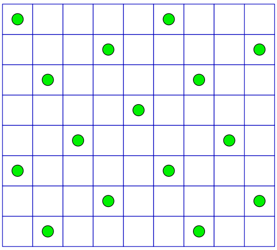


Joonis 6

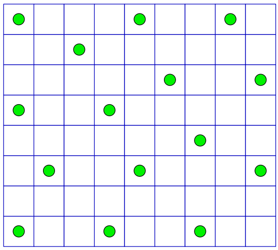


Joonis 7

Märkus. Paigutus joonisel 8 saadakse ideega, et tasandi võib tühimiketa katta ülesandes vaadeldavate „ristidega". Joonisel 9 kujutatud paigutus näitab, et käesolevas ülesandes võivad „ristide" vahel esineda tühimikud. See muudab teistsugused lähenemisviisid ülesandele keeruliseks.



Joonis 8

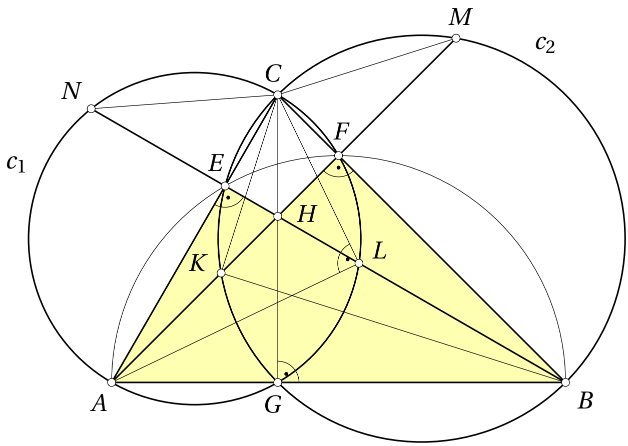


Joonis 9

Teine päev

4. *Lahendus 1.* Et $\angle AEB = \angle AFB = 90^\circ$, siis asuvad punktid E ja F ringjoonel diameetriga AB (joonis 10). Järelikult $|CE| \cdot |CA| = |CF| \cdot |CB|$. Et ALC on täisnurkne kolmnurk kõrgusega LE, siis Eukleidese teoreemist $|CE| \cdot |CA| = |CL|^2$. Täisnurksest kolmnurgast BKC saame analoogiliselt $|CF| \cdot |CB| = |CK|^2$. Järelikult $|CL|^2 = |CK|^2$ ehk $|CL| = |CK|$. Lõik LN on risti ringjoone c_1 diameetriga AC, seega $|CL| = |CN|$, analoogiliselt $|CK| = |CM|$. Kokkuvõttes näeme, et lõigud CK, CL, CN ja CM on võrdse pikkusega ehk punktid K, L, M ja N asuvad ringjoonel keskpunktiga C.

Lahendus 2. Olgu G antud ringjoonte teine (punktist C erinev) lõikepunkt. Et AC ja BC on ringjoonte diameetrid, siis $\angle AGC = \angle BGC = 90^\circ$. Järelikult on lõik CG kolmnurga ABC kõrgus. Olgu H kolmnurga kõrguste lõikepunkt. Punktid K, G, M ja C asuvad ühel ringjoonel, seega $|KH| \cdot |HM| =$



Joonis 10

$= |CH| \cdot |HG|$. Samuti asuvad punktid G, L, C ja N asuvad ühel ringjoonel, seega $|CH| \cdot |HG| = |LH| \cdot |HN|$. Järelikult $|KH| \cdot |HM| = |LH| \cdot |HN|$. Viimane võrdus aga tähendabki, et punktid K, L, M ja N asuvad ühel ringjoonel.

5. Et iga $i \geqslant 1$ korral $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_i}{i} = b_i$, siis võrratust $xy \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ kasutades saame

$$\begin{aligned} b_i^2 - 2b_i a_i &= b_i^2 - 2b_i(ib_i - (i-1)b_{i-1}) = \\ &= (1-2i)b_i^2 + 2(i-1)b_i b_{i-1} \leqslant \\ &\leqslant (1-2i)b_i^2 + (i-1)(b_i^2 + b_{i-1}^2) = \\ &= -ib_i^2 + (i-1)b_{i-1}^2. \end{aligned}$$

Saadud tulemused summeerime üle kõigi i väärtuste 1-st n-ni, saame

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} b_i a_i \leqslant -nb_n^2 \leqslant 0.$$

Seega

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} b_i a_i.$$

Viimase võrduse paremale poolele rakendame Cauchy-Schwarzi võrratust:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Nüüd jagame võrratuse pooli arvuga $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2}$ ning tõstame tulemuse pooled ruutu. Nii jõuamegi vajaliku võrratuseni

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 4 \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

6. Iga positiivse täisarvu n võib esitada algtegurite korrutisena kujul

$$n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p(n)},$$

kus $\alpha_p(n)$ tähistab algarvu p suurimat astet, millega n jagub. Arvu n positiivsete jagajate arv on siis

$$d(n) = \prod_{p|n} \left(\alpha_p(n) + 1\right).$$

Et $d(n)$ saab omandada kui tahes suuri väärtusi (näiteks $d(2^n) = n + 1$), siis leidub lõpmata palju ülijaguvaid täisarve. Peale selle, kui n on ülijaguv täisarv ja $n = 2^{\alpha_2(n)} 3^{\alpha_3(n)} \ldots p^{\alpha_p(n)}$, siis $\alpha_2(n) \geqslant \alpha_3(n) \geqslant \ldots \geqslant \alpha_p(n)$, sest vastasel korral võiksime leida arvust n väiksema arvu, millel on sama palju tegureid.

Tõestame, et iga algarvu p korral leidub ainult lõplik hulk ülijaguvaid täisarve, mis ei jagu arvuga p. Kui $p = 2$, siis väide kehtib ilmselt. Oletame, et p on järjekorras r-s algarv ning tema korral leidub lõpmata palju ülijaguvaid täisarve n, mis p-ga ei jagu (ja järelikult ei jagu ka ühegi p-st suurema algarvuga). Et niisuguste arvude puhul $d(n) \leqslant (\alpha_2(n) + 1)^{r-1}$, siis saab $\alpha_2(n)$ omandada kui tahes suuri väärtusi. Valime ülijaguva arvu n nii, et $2^{\alpha_2(n)-1} > p^2$, ning vaatleme arvu $m = \dfrac{np}{2^{[\alpha_2(n)/2]}}$. Siin $m < n$, kuid

$$d(m) = 2d(n) \frac{\alpha_2(n) - [\alpha_2(n)/2] + 1}{\alpha_2(n) + 1} > d(n),$$

mis on vastuolus sellega, et n on ülijaguv.

Järgnevalt tõestame tugevama väite: iga algarvu p ja konstandi k korral leidub ainult lõplik hulk ülijaguvaid täisarve n, mille puhul $\alpha_p(n) \leqslant k$. Oletame, et leiduvad algarv p ja konstant k, et $\alpha_p(n) \leqslant k$ lõpmata paljude ülijaguvate arvude n jaoks. Olgu q suur algarv, mis rahuldab võrratust $q > p^{2k+1}$. Peale lõpliku hulga arvude jaguvad kõik sellised arvud n algarvuga q. Vaatleme arvu $m = \dfrac{np^{\alpha_p(n)\alpha_q(n)+\alpha_p(n)+\alpha_q(n)}}{q^{\alpha_q(n)}}$. Selle arvu puhul

$$d(m) = d(n) \frac{\alpha_p(n)\alpha_q(n) + \alpha_p(n) + \alpha_q(n) + 1}{(\alpha_p(n) + 1)(\alpha_q(n) + 1)} = d(n),$$

järelikult $m > n$. Siis

$$p^{2\alpha_p(n)\alpha_q(n)+\alpha_q(n)} \geqslant p^{\alpha_p(n)\alpha_q(n)+\alpha_p(n)+\alpha_q(n)} > q^{\alpha_q(n)},$$

millest $p^{2\alpha_p(n)+1} > q > p^{2k+1}$ ning saame vastuolu tingimusega $\alpha_p(n) \leqslant k$.

Olgu nüüd n selline ülijaguv täisarv, et $\alpha_3(n) \geqslant 8$. Kõik arvud peale lõpliku hulga arvude rahuldavad seda tingimust. Siis on $\frac{8n}{9}$ samuti täisarv ja et $\frac{8n}{9} < n$, siis $d\left(\frac{8n}{9}\right) < d(n)$. See annab

$$(\alpha_2(n)+4)(\alpha_3(n)-1) < (\alpha_2(n)+1)(\alpha_3(n)+1),$$

mis on samaväärne võrratusega $3\alpha_3(n) - 5 < 2\alpha_2(n)$. Eeldame, et arvule n vahetult järgnev ülijaguv arv m jagub arvuga n. Et $d(2n) > d(n)$, siis peab arvude $n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n$ seas leiduma ülijaguv arv. Järelikult $m = 2n$. Siis aga $d\left(\frac{3n}{2}\right) \leqslant d(n)$ (vastasel korral leiduks ülijaguv arv arvude n ja $\frac{3n}{2}$ vahel). See annab

$$\alpha_2(n)(\alpha_3(n)+2) \leqslant (\alpha_2(n)+1)(\alpha_3(n)+1),$$

mis on samaväärne võrratusega $\alpha_2(n) \leqslant \alpha_3(n) + 1$. Seega

$$3\alpha_3(n) - 5 < 2\alpha_2(n) \leqslant 2(\alpha_3(n)+1)$$

ehk $\alpha_3(n) < 7$, mis on vastuolus eeldusega $\alpha_3(n) \geqslant 8$. Järelikult ei saa tingimust $\alpha_3(n) \geqslant 8$ rahuldavate ülijaguvate arvude hulgas leiduda ühtegi arvu, mis oleks vahetult järgneva ülijaguva arvu jagajaks.

Märkus. Ülijaguva arvu mõiste esineb esimest korda Ramanujani töödes aastal 1915. Eric Weinsteini *World of Mathematics* nimetab mõnda ülijaguvate (*highly divisible*) arvude omadust ja annab kirjanduseviiteid. Ross Honsbergeri raamatus *Mathematical Gems* on nendele arvudele pühendatud omaette peatükk.

Esimene päev

1. *(Indrek Zolk)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Ülesande a)-osa, leitud arvu b suurim võimalik väärtus: 4 p
   - Ülesande b)-osa, leitud kõigi ülesande tingimustele vastavate arvupaaride teiste komponentide summa: 3 p

   Tööd, mille a)-osas oli läbi vaadatud ainult mõned võrrandite lahendite kombineerimisvõimalused, ent arvu b suurima võimaliku väärtuse leidmisega oli siiski lõpuni mindud, said a)-osa eest 1 punkti vähem.

   Lahendajate jaoks osutus raskemaks ülesande b)-osa. a)-osas oli mitmetes töödes probleemiks, et läbi polnud vaadatud kõiki lahendite kombineerimisvõimalusi. Siiski kui läbivaadatute hulka oli sattunud selline, kus $x_1y_1 - x_2y_2 = 4a\sqrt{a^2 - b}$ või selle vastandarv, siis oli a)-osaga reeglina lõpuni mindud.

2. *(Hendrik Nigul)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

   - Täielik lahendus: 7 p
   - Täielik lahendus pisiveaga: 6 p
   - Poolik lahendus, milles on olemas põhiidee ning mida saab lõpuni viia: 4 p
   - Lõigu $E'F'$ pikkuse leidmine mingil erijuhul: 1 p
   - Nurkade arvutamine, kõõlnelinurga omaduste kasutamine: 0 p

3. *(Härmel Nestra)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Konstruktsioon 15 ristiga: 2 p
   - Tõestus, et üle 15 risti pole võimalik paigutada: 5 p

   Konstruktsioonid vähem kui 15 ristiga punkte ei andnud. Tõestused, et üle 16 risti pole võimalik paigutada, samuti.

   Valdav osa lahendajatest oli esitanud õige vastuse ja vastava konstruktsiooni. Ülejäänud osas suurt midagi tehtud ei olnud.

Teine päev

4. *(Reimo Palm)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.
   - Täielik lahendus: 7 p
   - Saadud, et $|KC| = |MC|$ ja $|LC| = |NC|$: 1 p
   - Märgitud, et punktid A, B, E ja F asuvad samal ringjoonel: 1 p

5. *(Jan Villemson)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.
   - Idee avaldada jada liikmed a_i aritmeetiliste keskmiste b_i kaudu ning viia ülesanne kujule, mis sõltub ainult nendest keskmistest: 3 p

   Ülesande eest sai punkte ainult üks õpilane.

6. *(Oleg Košik)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.
   - Kirja pandud jagajate arvu valem, lähtudes arvu üldkujust: 0 p
   - Põhjendatud, et kui a ja b on järjestikused ülijaguvad arvud ja b jagub a-ga, siis $b = 2a$: 1 p
   - Tõestatud, et ülijaguva arvu iga algteguri astmenäitaja on vähemalt niisama suur kui sama arvu iga sellest suurema algteguri astmenäitaja: 1 p
   - Tehtud mõlemad punktiväärilised tähelepanekud: 2 p
   - Lisaks näidatud, et $\alpha_3(n) \leqslant \alpha_2(n) + 1$ ja kõik ülijaguvad arvud alates mingist arvust jaguvad 3-ga: 3 p