Отборочный конкурс в команду Эстонии на ММО’06

5–6 апреля 2006 г. **Первый день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

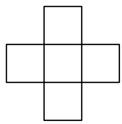
1. Пусть k — произвольное фиксированное положительное целое число. Рассмотрим пары целых чисел (a, b), при которых квадратные уравнения $x^2 - 2ax + b = 0$ и $y^2 + 2ay + b = 0$ имеют решения в действительных числах (не обязательно различные), которые можно обозначить x_1, x_2 и y_1, y_2 соответственно в таком порядке, что выполняется равенство $x_1 y_1 - x_2 y_2 = 4k$.

а) Найти наибольшее возможное значение второй компоненты b в такой паре (a, b).

б) Найти сумму вторых компонент всех таких пар.

2. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая AO пересекает сторону BC в точке D. На сторонах AB и AC выбираются такие точки E и F, соответственно, что точки A, E, D, F лежат на одной окружности. Пусть E' и F' — точки падения, опущенных из точек E и F, соответственно, перпендикуляров на сторону BC. Доказать, что длина отрезка $E'F'$ не зависит от расположения точек E и F.

3. Дан клетчатое поле размером 10×11. Найти максимальное количество „крестиков“ (на рисунке справа), покрывающих пять клеток, которое возможно разместить на поле так, чтобы никакие два из „крестиков“ не покрывали одну клетку.



Отборочный конкурс в команду Эстонии на ММО'06

5–6 апреля 2006 г. **Второй день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. Сторона AC остроугольного треугольника ABC является диаметром окружности c_1, а сторона BC — диаметром окружности c_2. Пусть E — точка падения высоты опущенной из вершины B треугольника, а F — точка падения высоты опущенной из вершины A. Кроме того, пусть L и N точки пересечения прямой BE с окружностью c_1 (точка L лежит на отрезке BE), и K и M точки пересечения прямой AF с окружностью c_2 (точка K лежит на отрезке AF). Доказать, что $KLMN$ является вписанным четырёхугольником.

5. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — последовательность положительных действительных чисел. Доказать, что для любого положительного целого числа n выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 4 \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

где b_i является арифметическим среднем чисел $a_1, a_2, \ldots, a_i$.

6. Обозначим через $d(n)$ число положительных делителей положительного целого числа n. Положительное целое число n называется *сверхделимым*, если для всех положительных целых чисел $m < n$ выполняется $d(m) < d(n)$. Два сверхделимых целых числа m и n называют последовательными, если $m < n$ и не существует сверхделимого целого числа s такого, что $m < s < n$. Доказать, что множество всех пар (a, b) последовательных сверхделимых целых чисел, таких что число b делится на число a, является конечным.