IMO'06 Eesti võistkonna valikvõistlus

5.–6. aprill 2006 **Lahendused**

Esimene päev

1. *Vastus:* a) $k^2 - 1$; b) 0.

Kirjutades võrrandid kujul $(x-a)^2 = a^2 - b$ ja $(y+a)^2 = a^2 - b$, näeme, et nende lahendid on reaalarvulised parajasti siis, kui $a^2 - b \geqslant 0$; ruutvõrrandite lahendid on

$$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - b},$$
$$y_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}.$$

Leiame avaldise $x_1 y_1 - x_2 y_2$ võimalikud väärtused. Olgu $x_1 = a + \varepsilon\sqrt{s^2 - b}$ ja $y_1 = -a + \delta\sqrt{a^2 - b}$, kus kordajad ε ja δ on mingid arvud hulgast $\{-1, 1\}$. Siis $x_2 = a - \varepsilon\sqrt{a^2 - b}$ ja $y_2 = -a - \delta\sqrt{a^2 - b}$. Tähistades lühiduse mõttes $\sqrt{a^2 - b} = c$, leiame

$$\begin{aligned} x_1 y_1 - x_2 y_2 &= (a + \varepsilon c)(-a + \delta c) - (a - \varepsilon c)(-a - \delta c) = \\ &= (-a^2 - \varepsilon ac + \delta ac + \varepsilon\delta c^2) - (-a^2 + \varepsilon ac - \delta ac + \varepsilon\delta c^2) = \\ &= -2a(\varepsilon - \delta)c. \end{aligned}$$

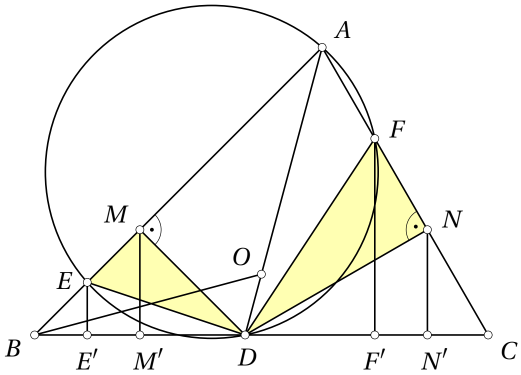
Et $\varepsilon - \delta$ omandab ainult väärtusi -2, 0 ja 2, siis saavad avaldise $x_1 y_1 - x_2 y_2$ võimalikud väärtused olla parajasti $4a\sqrt{a^2 - b}$, 0 ja $-4a\sqrt{a^2 - b}$. Võrdus $x_1 y_1 - x_2 y_2 = 4k$ kehtib seega parajasti siis, kui $4k$ on võrdne ühega nendest arvudest. Et k on positiivne, siis $k \neq 0$. Järelikult

$$k = |a|\sqrt{a^2 - b}.$$

Viimane võrdus esitab arvu k kahe teguri korrutisena, kumbki neist peab olema täisarv, sest ruutjuur täisarvust saab olla ainult kas täisarv või irratsionaalarv. Vaadeldavat võrdust rahuldavad seega parajasti kõik need arvupaarid (a, b), mida on võimalik saada järgmisel viisil: esitame arvu k kahe positiivse täisarvu korrutisena $k = mn$ ning määrame võrduste $|a| = m$ ja $\sqrt{a^2 - b} = n$ abil

$$a = \pm m, \qquad b = m^2 - n^2.$$

Ülesande a)-osa lahendamiseks paneme tähele, et igas esituses $k = mn$ peab olema $m \leqslant k$ ja $n \geqslant 1$. Eelnevatest võrranditest saame $b \leqslant k^2 - 1$, kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $m = k$ ja $n = 1$. Arvu b maksimaalne väärtus on järelikult $k^2 - 1$.



Joonis 1

Ülesande b)-osa lahendamiseks tuleb leida kõigi paaride (a,b) teiste komponentide summa üle kõigi selliste arvupaaride (m,n), kus $mn = k$. Kui $m = n$, siis ilmselt $b = 0$. Kui $m \neq n$, siis vaatleme paare (m,n) ja (n,m). Neile vastavate paaride (a,b) teiste komponentide b summa on $(m^2-n^2)+(n^2-m^2) = 0$, sõltumata esimese komponendi a märgist. Otsitav summa on seega 0.

2. Olgu M ja N punktist D vastavalt külgedele AB ja AC tõmmatud ristlõikude aluspunktid (joonis 1) ning M' ja N' vastavalt punktidest M ja N küljele BC tõmmatud ristlõikude aluspunktid. Piisab tõestada, et $|E'F'| = |M'N'|$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et punkt E asub lõigul BM ehk $\angle AED < 90^\circ$. Et punktid A, E, D, F asuvad ühel ringjoonel, siis $\angle DFC = \angle AED < 90^\circ$, seega F asub lõigul AN. Järelikult piisab tõestada, et $|E'M'| = |F'N'|$. Siin on $|E'M'| = |EM|\cos\angle B$ ja $|F'N'| = |FN|\cos\angle C$. Seega tuleb näidata, et $|EM|\cos\angle B = |FN|\cos\angle C$ ehk

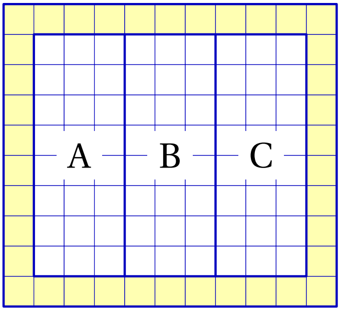
$$\frac{|EM|}{|FN|} = \frac{\cos\angle C}{\cos\angle B}.$$

Tõestame viimase võrduse. Et $\angle MED = \angle NFD$, siis on täisnurksed kolmnurgad EMD ja NFD sarnased, mistõttu

$$\frac{|EM|}{|FN|} = \frac{|MD|}{|ND|}.$$

Täisnurksest kolmnurgast AMD saame $|MD| = |AD|\sin\angle DAB$, täisnurksest kolmnurgast AND aga $|ND| = |AD|\sin\angle DAC$. Seega

$$\frac{|EM|}{|FN|} = \frac{\sin\angle DAB}{\sin\angle DAC}.$$



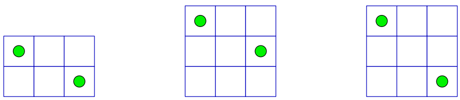
Joonis 2

Et O on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt, siis $\angle AOB = 2\angle C$. Võrdhaarsest kolmnurgast OAB saame nüüd $\angle DAB = 90^\circ - \angle C$ ehk $\sin\angle DAB = \cos\angle C$. Analoogiliselt $\sin\angle DAC = \cos\angle B$. Asetades need tulemused viimasesse jagatisse, jõuamegi vajaliku võrduseni.

3. *Vastus:* 15.

Tõestame, et 10×11 ruudustikule ei saa paigutada 16 „risti“. Oletame vastaselt, et see on võimalik. „Ristide“ asemel vaatleme nende keskpunkte, need peavad asuma keskmises 8×9 ristkülikus (joonis 2). Jagame selle keskmise ristküliku kolmeks 8×3 ristkülikuks A, B ja C ning uurime keskpunktide võimalikku arvu nendest kolmes osas.

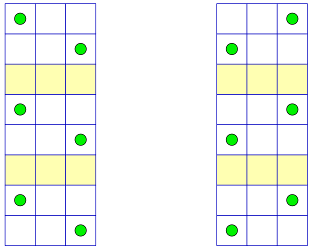
Lihtne on näha, et 2×3 ja 3×3 ristkülikule saab paigutada maksimaalselt kaks keskpunkti (joonis 3). Ühe 8×3 osaristküliku saab tükeldada kaheks 3×3 ristkülikuks ning nende vahel asuvaks 2×3 ristkülikuks. Seega saab 8×3 ristkülikult paigutada ülimalt 6 keskpunkti, igale tükile täpselt kaks. Et keskmisel 2×3 ristkülikul asub kaks keskpunkti, siis ei saa 8×3 ristküliku kolmandas ja kuuendas reas asuda ühtegi keskpunkti. Seega on võimalikud ainult kaks sümmeetrilist paigutust, mis on kujutatud joonisel 4.



Joonis 3

Et kolmel 8×3 ristkülikul asub ühtekokku 16 keskpunkti ja ühelegi neist ei saa paigutada üle 6 keskpunkti, siis peab leiduma ristkülik, millel on täpselt 6 keskpunkti.

- Kui ristkülik B sisaldab 6 keskpunkti, siis võime sümmeetria tõttu eeldada, et nad asuvad nagu joonisel 5. Lihtne on veenduda, et 8×9



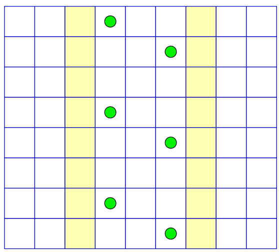
Joonis 4

ristküliku kolmandas ja seitsmendas veerus ei saa olla ühtegi keskpunkti. Siis aga saame ristkülikule A paigutada ülimalt 4 keskpunkti ning ristkülikult C samuti ülimalt 4, kokku tervele ruudustikule ülimalt $4 + 6 + 4 = 14$ keskpunkti, mis on vastuolus eeldusega, et keskpunkte on 16.

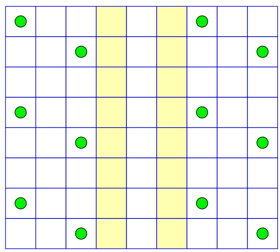
- Kui ristkülikud A ja C sisaldavad mõlemad 6 keskpunkti, siis võime eeldada, et need asuvad nagu joonisel 6. Siis ei saa olla ühtegi keskpunkti 8×9 ristküliku neljandas ja kuuendas veerus. Järelikult saab ristkülikule B keskpunkte paigutada ülimalt 3 ning kogu lauale ülimalt $6 + 3 + 6 = 15$, jällegi vastuolu.
- Kui täpselt üks ristkülikutest A ja C sisaldab 6 keskpunkti, siis võime eeldada, et ristkülik A sisaldab 6 ja ristkülik C sisaldab ülimalt 5 keskpunkti (joonis 7). Siis ei saa 8×9 ristküliku neljandas veerus asuda ühtegi keskpunkti, mistõttu ristkülik B sisaldab ülimalt 4 keskpunkti. Sel juhul saab kogu laual asuda ülimalt $6 + 4 + 5 = 15$ keskpunkti, samuti vastuolu.

Järelikult ei ole võimalik paigutada antud lauale 16 keskpunkti

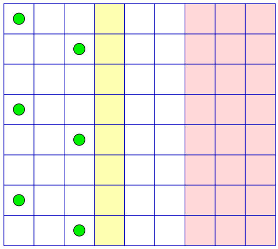
Seevastu 15 keskpunkti saab lauale paigutada, nagu nähtub jooniselt 8 või joonisel 9.



Joonis 5

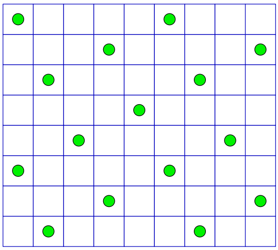


Joonis 6

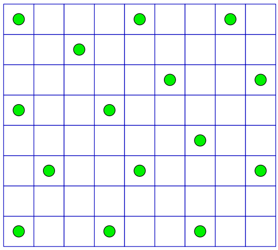


Joonis 7

Märkus. Paigutus joonisel 8 saadakse ideega, et tasandi võib tühimiketa katta ülesandes vaadeldavate „ristidega“. Joonisel 9 kujutatud paigutus näitab, et käesolevas ülesandes võivad „ristide“ vahel esineda tühimikud. See muudab teistsugused lähenemisviisid ülesandele keeruliseks.



Joonis 8

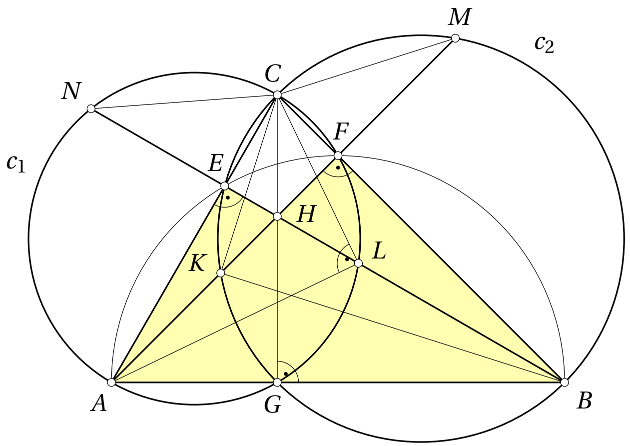


Joonis 9

Teine päev

4. *Lahendus 1.* Et $\angle AEB = \angle AFB = 90^\circ$, siis asuvad punktid E ja F ringjoonel diameetriga AB (joonis 10). Järelikult $|CE| \cdot |CA| = |CF| \cdot |CB|$. Et ALC on täisnurkne kolmnurk kõrgusega LE, siis Eukleidese teoreemist $|CE| \cdot |CA| = |CL|^2$. Täisnurksest kolmnurgast BKC saame analoogiliselt $|CF| \cdot |CB| = |CK|^2$. Järelikult $|CL|^2 = |CK|^2$ ehk $|CL| = |CK|$. Lõik LN on risti ringjoone c_1 diameetriga AC, seega $|CL| = |CN|$, analoogiliselt $|CK| = |CM|$. Kokkuvõttes näeme, et lõigud CK, CL, CN ja CM on võrdse pikkusega ehk punktid K, L, M ja N asuvad ringjoonel keskpunktiga C.

Lahendus 2. Olgu G antud ringjoonte teine (punktist C erinev) lõikepunkt. Et AC ja BC on ringjoonte diameetrid, siis $\angle AGC = \angle BGC = 90^\circ$. Järelikult on lõik CG kolmnurga ABC kõrgus. Olgu H kolmnurga kõrguste lõikepunkt. Punktid K, G, M ja C asuvad ühel ringjoonel, seega $|KH| \cdot |HM| =$



Joonis 10

$= |CH|\cdot|HG|$. Samuti asuvad punktid G, L, C ja N asuvad ühel ringjoonel, seega $|CH|\cdot|HG| = |LH|\cdot|HN|$. Järelikult $|KH|\cdot|HM| = |LH|\cdot|HN|$. Viimane võrdus aga tähendabki, et punktid K, L, M ja N asuvad ühel ringjoonel.

5. Et iga $i \geqslant 1$ korral $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_i}{i} = b_i$, siis võrratust $xy \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ kasutades saame

$$\begin{aligned} b_i^2 - 2b_i a_i &= b_i^2 - 2b_i(ib_i - (i-1)b_{i-1}) = \\ &= (1-2i)b_i^2 + 2(i-1)b_i b_{i-1} \leqslant \\ &\leqslant (1-2i)b_i^2 + (i-1)(b_i^2 + b_{i-1}^2) = \\ &= -ib_i^2 + (i-1)b_{i-1}^2. \end{aligned}$$

Saadud tulemused summeerime üle kõigi i väärtuste 1-st n-ni, saame

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} b_i a_i \leqslant -nb_n^2 \leqslant 0.$$

Seega

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} b_i a_i.$$

Viimase võrduse paremale poolele rakendame Cauchy-Schwarzi võrratust:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Nüüd jagame võrratuse pooli arvuga $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$ ning tõstame tulemuse pooled ruutu. Nii jõuamegi vajaliku võrratuseni

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 4 \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

6. Iga positiivse täisarvu n võib esitada algtegurite korrutisena kujul

$$n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p(n)},$$

kus $\alpha_p(n)$ tähistab algarvu p suurimat astet, millega n jagub. Arvu n positiivsete jagajate arv on siis

$$d(n) = \prod_{p|n} \left(\alpha_p(n) + 1\right).$$

Et $d(n)$ saab omandada kui tahes suuri väärtusi (näiteks $d(2^n) = n + 1$), siis leidub lõpmata palju ülijaguvaid täisarve. Peale selle, kui n on ülijaguv täisarv ja $n = 2^{\alpha_2(n)} 3^{\alpha_3(n)} \ldots p^{\alpha_p(n)}$, siis $\alpha_2(n) \geqslant \alpha_3(n) \geqslant \ldots \geqslant \alpha_p(n)$, sest vastasel korral võiksime leida arvust n väiksema arvu, millel on sama palju tegureid.

Tõestame, et iga algarvu p korral leidub ainult lõplik hulk ülijaguvaid täisarve, mis ei jagu arvuga p. Kui $p = 2$, siis väide kehtib ilmselt. Oletame, et p on järjekorras r-s algarv ning tema korral leidub lõpmata palju ülijaguvaid täisarve n, mis p-ga ei jagu (ja järelikult ei jagu ka ühegi p-st suurema algarvuga). Et niisuguste arvude puhul $d(n) \leqslant (\alpha_2(n) + 1)^{r-1}$, siis saab $\alpha_2(n)$ omandada kui tahes suuri väärtusi. Valime ülijaguva arvu n nii, et $2^{\alpha_2(n)-1} > p^2$, ning vaatleme arvu $m = \dfrac{np}{2^{[\alpha_2(n)/2]}}$. Siin $m < n$, kuid

$$d(m) = 2d(n) \frac{\alpha_2(n) - [\alpha_2(n)/2] + 1}{\alpha_2(n) + 1} > d(n),$$

mis on vastuolus sellega, et n on ülijaguv.

Järgnevalt tõestame tugevama väite: iga algarvu p ja konstandi k korral leidub ainult lõplik hulk ülijaguvaid täisarve n, mille puhul $\alpha_p(n) \leqslant k$. Oletame, et leiduvad algarv p ja konstant k, et $\alpha_p(n) \leqslant k$ lõpmata paljude ülijaguvate arvude n jaoks. Olgu q suur algarv, mis rahuldab võrratust $q > p^{2k+1}$. Peale lõpliku hulga arvude jaguvad kõik sellised arvud n algarvuga q. Vaatleme arvu $m = \dfrac{np^{\alpha_p(n)\alpha_q(n)+\alpha_p(n)+\alpha_q(n)}}{q^{\alpha_q(n)}}$. Selle arvu puhul

$$d(m) = d(n) \frac{\alpha_p(n)\alpha_q(n) + \alpha_p(n) + \alpha_q(n) + 1}{(\alpha_p(n) + 1)(\alpha_q(n) + 1)} = d(n),$$

järelikult $m > n$. Siis

$$p^{2\alpha_p(n)\alpha_q(n)+\alpha_q(n)} \geqslant p^{\alpha_p(n)\alpha_q(n)+\alpha_p(n)+\alpha_q(n)} > q^{\alpha_q(n)},$$

millest $p^{2\alpha_p(n)+1} > q > p^{2k+1}$ ning saame vastuolu tingimusega $\alpha_p(n) \leqslant k$.

Olgu nüüd n selline ülijaguv täisarv, et $\alpha_3(n) \geqslant 8$. Kõik arvud peale lõpliku hulga arvude rahuldavad seda tingimust. Siis on $\dfrac{8n}{9}$ samuti täisarv ja et $\dfrac{8n}{9} < n$, siis $d\left(\dfrac{8n}{9}\right) < d(n)$. See annab

$$(\alpha_2(n) + 4)(\alpha_3(n) - 1) < (\alpha_2(n) + 1)(\alpha_3(n) + 1),$$

mis on samaväärne võrratusega $3\alpha_3(n) - 5 < 2\alpha_2(n)$. Eeldame, et arvule n vahetult järgnev ülijaguv arv m jagub arvuga n. Et $d(2n) > d(n)$, siis peab arvude $n + 1$, $n + 2$, $\ldots$, $2n$ seas leiduma ülijaguv arv. Järelikult $m = 2n$. Siis aga $d\left(\dfrac{3n}{2}\right) \leqslant d(n)$ (vastasel korral leiduks ülijaguv arv arvude n ja $\dfrac{3n}{2}$ vahel). See annab

$$\alpha_2(n)(\alpha_3(n) + 2) \leqslant (\alpha_2(n) + 1)(\alpha_3(n) + 1),$$

mis on samaväärne võrratusega $\alpha_2(n) \leqslant \alpha_3(n) + 1$. Seega

$$3\alpha_3(n) - 5 < 2\alpha_2(n) \leqslant 2(\alpha_3(n) + 1)$$

ehk $\alpha_3(n) < 7$, mis on vastuolus eeldusega $\alpha_3(n) \geqslant 8$. Järelikult ei saa tingimust $\alpha_3(n) \geqslant 8$ rahuldavate ülijaguvate arvude hulgas leiduda ühtegi arvu, mis oleks vahetult järgneva ülijaguva arvu jagajaks.

Märkus. Ülijaguva arvu mõiste esineb esimest korda Ramanujani töödes aastal 1915. Eric Weinsteini *World of Mathematics* nimetab mõnda ülijaguvate (*highly divisible*) arvude omadust ja annab kirjanduseviiteid. Ross Honsbergeri raamatus *Mathematical Gems* on nendele arvudele pühendatud omaette peatükk.