IMO'06 Eesti võistkonna valikvõistlus

5.–6. aprill 2006 **Esimene päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

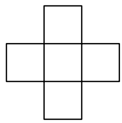
1. Olgu k suvaline fikseeritud positiivne täisarv. Vaatleme täisarvupaare (a, b), mille korral ruutvõrranditel $x^2 - 2ax + b = 0$ ja $y^2 + 2ay + b = 0$ leiduvad reaalarvulised lahendid (mitte tingimata erinevad), mida võib märkida vastavalt tähistega x_1, x_2 ja y_1, y_2 sellises järjekorras, et kehtib võrdus $x_1 y_1 - x_2 y_2 = 4k$.

a) Leia sellise arvupaari (a, b) teise komponendi b suurim võimalik väärtus.

b) Leia kõigi selliste arvupaaride teiste komponentide summa.

2. Teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt on O. Sirge AO lõikab külge BC punktis D. Kolmnurga külgedel AB ja AC valitakse vastavalt punktid E ja F nii, et punktid A, E, D, F asuvad ühel ringjoonel. Olgu E' ja F' vastavalt punktidest E ja F küljele BC tõmmatud ristlõikude aluspunktid. Tõesta, et lõigu $E'F'$ pikkus ei sõltu punktide E ja F asendist.

3. Antud on ruudustik mõõtmetega 10×11. Kui palju saab maksimaalselt ruudustikule paigutada viit ühikruutu katvaid „riste" (joonisel paremal), nii et ükski kaks neist ei kataks sama ruutu?



IMO'06 Eesti võistkonna valikvõistlus

5.–6. aprill 2006 **Teine päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

4. Teravnurkse kolmnurga ABC külg AC on diameetriks ringjoonele c_1 ja külg BC on diameetriks ringjoonele c_2. Olgu E kolmnurga tipust B tõmmatud kõrguse aluspunkt ja F tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt. Lisaks olgu L ja N sirge BE lõikepunktid ringjoonega c_1 (punkt L asub lõigul BE) ning K ja M sirge AF lõikepunktid ringjoonega c_2 (punkt K asub lõigul AF). Tõesta, et $KLMN$ on kõõlnelinurk.

5. Olgu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ positiivsete reaalarvude jada. Tõesta, et suvalise positiivse täisarvu n korral kehtib võrratus

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 4 \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

kus b_i on arvude $a_1, a_2, \ldots, a_i$ aritmeetiline keskmine.

6. Tähistagu $d(n)$ positiivse täisarvu n positiivsete jagajate arvu. Positiivset täisarvu n nimetatakse *ülijaguvaks*, kui kõigi positiivsete täisarvude $m < n$ korral $d(m) < d(n)$. Kahte ülijaguvat täisarvu m ja n nimetatakse järjestikusteks, kui $m < n$ ja ei leidu ülijaguvat täisarvu s nii, et $m < s < n$. Tõesta, et kõigi selliste järjestikuste ülijaguvate täisarvude paaride (a, b) hulk, mille korral arv b jagub arvuga a, on lõplik.