

Отборочный конкурс в команду Эстонии на ММО'05

3–4 апреля 2005 г.

Первый день

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.

Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. На плоскости даны прямая l и две разного радиуса окружности c_1 и c_2 , которые обе касаются прямой l в точке P . На прямой l выбирается точка $M \neq P$ так, чтобы угол Q_1MQ_2 был как можно больше, где Q_1 и Q_2 – это точки касания отличных от прямой l касательных, проведенных из точки M к окружностям c_1 и c_2 соответственно. Найти $\angle PMQ_1 + \angle PMQ_2$.
2. На планете Автомория бесконечно много жителей – автоморов. Каждый автомор любит ровно одного автомора и уважает ровно одного автомора. Кроме этого выполняются следующие закономерности:
 - каждого автомора любит какой-то автомор;
 - если автомор A любит автомора B , то тогда автомора B любят и все те автоморы, которые уважают автомора A ;
 - если автомор A уважает автомора B , то тогда автомора B уважают и все те автоморы, которые любят автомора A .

Можно ли утверждать, что каждый автомор уважает того автомора, которого любит?

3. Найти все пары (x, y) положительных целых чисел, удовлетворяющих уравнению

$$(x + y)^x = x^y.$$

Отборочный конкурс в команду Эстонии на ММО'05

3–4 апреля 2005 г.

Второй день

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.

Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. Найти все пары (a, b) действительных чисел, при которых все корни многочленов $6x^2 - 24x - 4a$ и $x^3 + ax^2 + bx - 8$ действительные и неотрицательные.
5. На горизонтальной прямой отмечены 2005 точек, часть из которых раскрашены белым цветом, а остальные – чёрным. Для каждой точки находят, сколько белых точек остаётся справа, и сколько чёрных – слева от неё, полученные два числа складывают. Известно, что среди найденных 2005 сумм ровно одно значение встречается нечётное число раз. Найти все возможности, чему может равняться это значение.
6. На плоскости даны прямая l и окружность, не имеющая с прямой общих точек. Пусть AB – диаметр окружности, который перпендикулярен прямой l , причём точка B находится к прямой l ближе, чем точка A . На окружности выбирается точка C , отличная от точек A и B . Прямая AC пересекает прямую l в точке D . Прямая, проведенная из точки D , касается окружности в точке E , которая находится с той же стороны прямой AC , что и точка B . Прямая EB пересекает прямую l в точке F , а прямая FA пересекает окружность во второй раз в точке G . Доказать, что точка, симметричная точке G относительно прямой AB , находится на прямой FC .