IMO'05 Eesti võistkonna valikvõistlus

3.–4. aprill 2005

Lahendused ja vastused

Esimene päev

1. *Vastus:* π.

   Vaatleme esiteks juhtu, kus ringjooned c_1 ja c_2 asuvad sirgest l samal pool (joonis 1). Olgu O_1 ja O_2 vastavalt ringjoonte c_1 ja c_2 keskpunktid ning r_1 ja r_2 ringjoonte raadiused, üldisust kitsendamata võime eeldada, et $r_1 > r_2$. Lühiduse mõttes tähistame veel $\angle PMQ_1 = \alpha_1$, $\angle PMQ_2 = \alpha_2$ ning $|PM| = d$. Võrdustest $\angle PMO_1 = \frac{1}{2}\angle PMQ_1$ ja $\angle PMO_2 = \frac{1}{2}\angle PMQ_2$ näeme, et $\angle Q_1MQ_2 = \alpha_1 - \alpha_2$ on maksimaalse väärtusega parajasti siis, kui $\angle O_1MO_2 = \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2}$ on maksimaalne. See omakorda leiab aset parajasti siis, kui viimase nurga tangens on võimalikult suur, sest tangens on esimeses veerandis kasvav. Nurkade vahe tangensi valemist

   $$\tan\left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\alpha_1}{2} - \tan\frac{\alpha_2}{2}}{1 + \tan\frac{\alpha_1}{2}\cdot\tan\frac{\alpha_2}{2}} = \frac{\frac{r_1}{d} - \frac{r_2}{d}}{1 + \frac{r_1}{d}\cdot\frac{r_2}{d}}.$$

   Esitades tulemuse kujul

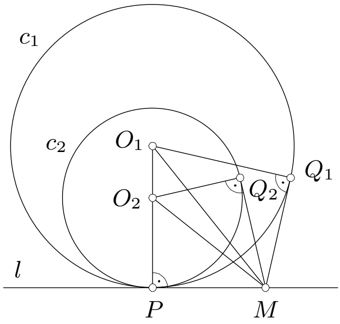
   $$\tan\left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2}\right) = \frac{r_1 - r_2}{d + \frac{r_1 r_2}{d}} = \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{r_1 r_2}\left(\frac{d}{\sqrt{r_1 r_2}} + \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{d}\right)},$$

   saame, et viimases avaldises on murru nimetaja väärtus minimaalne, kui $d = \sqrt{r_1 r_2}$. Siis aga

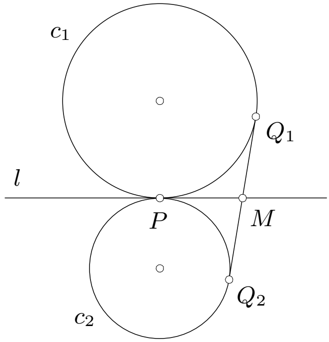
   $$\tan\frac{\alpha_1}{2} = \frac{r_1}{d} = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_2}}, \qquad \tan\frac{\alpha_2}{2} = \frac{r_2}{d} = \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}}$$

   ehk $\tan\frac{\alpha_1}{2}$ ja $\tan\frac{\alpha_2}{2}$ on teineteise pöördarvud. Seetõttu $\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = \frac{\pi}{2}$ ja $\angle PMQ_1 + \angle PMQ_2 = \alpha_1 + \alpha_2 = \pi$.

   Teisel juhul, kui ringjooned c_1 ja c_2 asuvad sirgest l erineval pool (joonis 2), siis on maksimaalse nurga Q_1MQ_2 suurus π, mis ongi üldse suurim võimalik nurk. Punkt M asub sel juhul ringjoonte c_1 ja c_2 ühisel puutujal, mis lõikub sirgega l. Sel juhul $\angle PMQ_1 + \angle PMQ_2 = \angle Q_1MQ_2 = \pi$.



Joonis 1



Joonis 2

2. *Vastus:* jah.

   Lahendus 1. Tõestame kõigepealt, et kõik automoorid armastavad iseennast. Olgu A suvaline automoor. Siis leidub automoor B, keda A armastab, ning automoor C, keda A austab. Samuti leidub automoor D, kes armastab automoori A. Et D armastab A-d ja A austab C-d, siis D austab C-d. Vastavalt ülesande tingimusele leidub automoor, keda C armastab. Kui see automoor ei oleks B, siis armastaks A kahte automoori: seda, keda C armastab, ja B-d; seega saaksime vastuolu tingimusega, et iga automoor armastab ainult ühte automoori. Järelikult armastab C automoori B. Et D austab C-d ja C armastab B-d, siis D armastab B-d. Samal ajal armastab D ka A-d, seetõttu peab olema $A = B$ ehk A armastab iseennast.

   Tõestame nüüd, et kõik automoorid austavad iseennast. Olgu A suvaline automoor ja B see automoor, keda A austab. Eelneva järgi armastavad A ja B iseennast. Et A austab B-d ja B armastab iseennast, siis A armastab B-d. Samal ajal armastab A iseennast. Seega peab olema $A = B$ ehk A austab iseennast.

   Et iga automoor armastab ja austab ainult ühte automoori, kelleks on tema ise, siis on vastus ülesande küsimusele jaatav.

   Lahendus 2. Defineerime automooride hulgal funktsioonid f ja g, lugedes, et $f(A)$ on see automoor, keda A armastab, ja $g(A)$ on see automoor, keda A austab. Ülesande tingimused võib siis kirja panna järgmiselt:

   - iga automoori A korral leidub automoor C, et $f(C) = A$;
   - iga automoori C korral $f(g(C)) = f(C)$;
   - iga automoori C korral $g(f(C)) = g(C)$.

Näitame, et funktsioonide f ja g väärtused on igal argumendil võrdsed. Rakendades kolmanda tingimuse mõlemale poolele funktsiooni f, saame

$$f(g(f(C))) = f(g(C)).$$

Tulemuse mõlemas pooles kasutame teist tingimust, sellega võime võrduse ümber kirjutada kujul

$$f(f(C)) = f(C).$$

Saadud võrdusest järeldub, et suvalise A korral

$$f(A) = A,$$

sest esimese tingimuse põhjal võime suvalise A korral valida C nii, et $f(C) = A$. Seega armastab iga automoor iseennast. Teise tingimuse ja saadud võrduse abil nüüd

$$f(A) = f(g(A)) = g(A).$$

Järelikult on suvalise A korral see, keda A armastab, ja see, keda A austab, üks ja sama automoor (kes tegelikult pole keegi muu kui A ise).

3. *Vastus:* $(2, 6)$ ja $(3, 6)$.

Lahendus 1. Esitame arvud x ja y kujul $x = ad$ ja $y = bd$, kus d on arvude x ja y suurim ühistegur ning a ja b on ühistegurita. Ülesande võrdus omandab siis kuju

$$(ad + bd)^{ad} = (ad)^{bd}$$

ehk pärast d-nda juure leidmist ja arvu d astmete eraldamist

$$(a + b)^a d^a = a^b d^b.$$

Kui oleks $a \geqslant b$, siis saaksime võrduse $(a + b)^a d^{a-b} = a^b$, millest järeldub, et arv a^b jagub arvuga $(a + b)^a$. Et a ja $a + b$ on samuti ühistegurita, siis peab kehtima $(a + b)^a = 1$, mis ei ole võimalik, sest a ja b on positiivsed täisarvud. Järelikult $a < b$ ning $(a + b)^a = a^b d^{b-a}$, mistõttu arv $(a + b)^a$ jagub arvuga a^b. Et $a + b$ ja a on ühistegurita, siis ainukese võimalusena $a^b = 1$, millest $a = 1$. Seega kehtib võrdus

$$1 + b = d^{b-1}.$$

Juhul $b = 2$ saame siit $d = 3$, see annab lahendi $x = 3$, $y = 6$. Juhul $b = 3$ saame $d = 2$, mis annab lahendi $x = 2$, $y = 6$. Juhul $b \geqslant 4$ arvestame ülaltoodud võrdusest järelduvat tingimust $d \geqslant 2$, mille tõttu $d^{b-1} \geqslant 2^{b-1} > 1 + b$; viimase võrratuse kehtivuses võib veenduda näiteks induktsiooniga. Järelikult rohkem lahendeid ei ole.

Lahendus 2. Et $x^y = (x+y)^x > x^x$, siis $y > x$. Olgu $y = nx$, kus n on mingi ühest suurem ratsionaalarv. Ülesande võrdusest saame seose

$$(x+nx)^x = x^{nx},$$

mis pärast x-nda juure leidmist ja poolte jagamist x-ga teiseneb kujule

$$1+n = x^{n-1}.$$

Võrduse paremal poolel esitub astendaja $n-1$ kui positiivne ratsionaalarv taandatud murruna $\frac{p}{q}$, seetõttu saab arv

$$x^{n-1} = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

kui teatava naturaalarvu q-s juur olla ainult kas naturaalarv või irratsionaalarv. Võrduse vasak pool aga irratsionaalarv olla ei saa, järelikult on ta naturaalarv. Seega on ka n naturaalarv, eelduse kohaselt on n ühest suurem. Samamoodi nagu esimeses lahenduses leiame kaks võimalikku lahendit: juhul $n=2$ saame $x=3$ ja $y=6$, juhul $n=3$ saame aga $x=2$ ja $y=6$; juhul $n \geqslant 4$ lahendeid pole.

Teine päev

4. *Vastus:* ainuke sobiv arvpaar on $(-6, 12)$.

   Olgu x_1 ja x_2 esimese polünoomi nullkohad ning x_1', x_2' ja x_3' teise polünoomi nullkohad. Jagades esimese polünoomi 6-ga, saame polünoomi $x^2 - 4x - \frac{2}{3}a$, mille nullkohad on samuti x_1 ja x_2. Viète'i valemite põhjal

   $$x_1 + x_2 = 4, \qquad x_1 x_2 = -\frac{2}{3}a.$$

   Rakendades Viète'i valemeid ülesande teisele polünoomile $x^3 + ax + bx - 8$, saame seosed

   $$x_1' + x_2' + x_3' = -a, \qquad x_1'x_2' + x_2'x_3' + x_3'x_1' = b, \qquad x_1'x_2'x_3' = 8.$$

   Nüüd ühelt poolt

   $$4 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \geqslant x_1x_2 = -\frac{2}{3}a$$

   ning teiselt poolt

   $$-\frac{2}{3}a = \frac{2}{3}(x_1' + x_2' + x_3') \geqslant 2\sqrt[3]{x_1'x_2'x_3'} = 4.$$

Siit näeme, et mõlemas võrratuses kehtib tegelikult võrdus. Järelikult $x_1 = x_2$, $x_1' = x_2' = x_3'$ ja $-\frac{2}{3}a = 4$. Viimasest seosest leiame $a = -6$. Et $x_1'x_2'x_3' = 8$, siis $x_1' = x_2' = x_3' = 2$, millest saame $b = 12$.

Teiselt poolt, $a = -6$, $b = 12$ korral saame $6x^2 - 24x - 4a = 6(x-2)^2$ ja $x^3 + ax^2 + bx - 8 = (x-2)^3$, seega on ülesande tingimused täidetud.

5. *Vastus:* ainuke võimalus on 1002.

   Kui sirgel esinevad kõrvuti valge punkt V ja must punkt M järjekorras VM, siis vastavad neile punktidele võrdsed summad, sest kummastki paremal asub ühepalju valgeid ja kummastki vasakul ühepalju musti punkte. Kui punktid asuvad järjekorras MV, siis vastavad punktidele ikka võrdsed summad, sest eelmise olukorraga võrreldes on musta punkti puhul lisandunud üks paremal asuv valge punkt ja valge punkti puhul üks vasakul asuv must punkt. Kui vahetada kaks kõrvutiasuvat erinevat värvi punkti, siis muutuvad ainult nendele punktidele vastavad summad, ülejäänud summad jäävad samaks. Seega saab iga väärtuse esinemiste arv summade hulgas muutuda niisugusel vahetamisel ainult paarisarvu võrra ning esinemiste arvu paarsus jääb alati samaks.

   Eeldame, et sirgel on n valget ja $2005 - n$ musta punkti. Järjestikuste vahetamistega toome valged punktid algusesse:

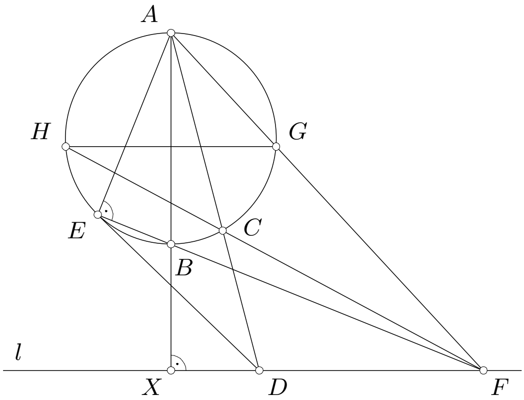
$$VV\ldots VVMM\ldots MM.$$

   Vastavad summad on

$$n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 2003-n,\ 2004-n.$$

   Ka selles järjendis esineb täpselt üks väärtus paaritu arv kordi. Et järjendi keskmised väärtused esinevad kahekaupa, siis peab paaritu arv kordi esinev väärtus olema kas $n-1$ järjendi alguses või $2004-n$ järjendi lõpus. Kui paariline puudub väärtusel $n-1$, siis peab olema $n-2 = 2004-n$, millest $n = 1003$ ja $n-1 = 1002$. Kui paariline puudub väärtusel $2004-n$, siis $n-1 = 2003-n$ ehk $n = 1002$ ja $2004-n = 1002$ nagu eelmisel juhulgi.

6. Olgu H sirge FC teine lõikepunkt ringjoonega (joonis 3). Me peame näitama, et $GH \perp AB$ ehk $GH \parallel l$. See on samaväärne võrdusega $\angle AGH = \angle AFD$. Et $\angle AGH = \angle ACH = \angle FCD$, siis piisab tõestada samaväärne väide $\angle FCD = \angle AFD$, mis omakorda on samaväärne väitega, et kolmnurgad FCD ja AFD on sarnased, sest neil on tipu D juures ühine nurk. Nimetatud kolmnurgad on sarnased parajasti siis, kui $\frac{|DF|}{|DC|} = \frac{|DA|}{|DF|}$ ehk $|DF|^2 = |DC| \cdot |DA|$. Et aga $|DC| \cdot |DA| = |DE|^2$, siis on eelmine võrdus sama mis võrdus $|DE| = |DF|$ ehk $\angle DEF = \angle DFE$. Tõestame selle võrduse.



Joonis 3

Olgu X sirgete AB ja l lõikepunkt. Siis $\angle AEF = \angle AXF = 90^\circ$, mistõttu punktid A, E, X ja F asuvad ühel ringjoonel. Järelikult $\angle XFE = \angle EAB$. Kasutades teoreemi lõikajast ja puutujast, saame $\angle DEF = \angle EAB$. Siit järeldubki vajalik võrdus.