

# IMO'05 Eesti võistkonna valikvõistlus

3.–4. aprill 2005

## Esimene päev

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Tasandil on antud sirge  $l$  ning kaks erineva raadiusega ringjoont  $c_1$  ja  $c_2$ , mis puutuvad sirget  $l$  punktis  $P$ . Sirgel  $l$  valitakse punkt  $M \neq P$  nii, et nurk  $Q_1MQ_2$  oleks võimalikult suur, kus  $Q_1$  ja  $Q_2$  on punktist  $M$  vastavalt ringjoontele  $c_1$  ja  $c_2$  tõmmatud sirgest  $l$  erinevate puutujate puutepunktid nende ringjoontega. Leia  $\angle PMQ_1 + \angle PMQ_2$ .
2. Automooria planeedil on lõpmata palju elanikke – automoore. Iga automoor armastab täpselt ühte automoori ja austab täpselt ühte automoori. Lisaks kehtivad järgmised seaduspärasused:
  - iga automoori armastab mingi automoor;
  - kui automoor  $A$  armastab automoori  $B$ , siis armastavad  $B$ -d ka kõik need automoorid, kes austavad  $A$ -d;
  - kui automoor  $A$  austab automoori  $B$ , siis austavad  $B$ -d ka kõik need automoorid, kes armastavad  $A$ -d.

Kas võib väita, et iga automoor austab seda automoori, keda armastab?

3. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid  $(x, y)$ , mis rahuldavad võrrandit

$$(x + y)^x = x^y.$$

# IMO'05 Eesti võistkonna valikvõistlus

3.-4. aprill 2005

## Teine päev

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

4. Leia kõik reaalarvude paarid  $(a, b)$ , mille korral polünoomide  $6x^2 - 24x - 4a$  ja  $x^3 + ax^2 + bx - 8$  kõik nullkohad on reaalarvulised ja mittenegatiivsed.
5. Horisontaalsel sirgel on märgitud 2005 punkti, millest osa on värvitud valgeks, ülejäänud aga mustaks. Iga punkti puhul loetakse kokku, mitu valget punkti jääb temast paremale ja mitu musta punkti jääb temast vasakule, saadud kaks arvu liidetakse. On teada, et leitud 2005 summa hulgas esineb täpselt üks väärtus paaritu arv kordi. Leia kõik võimalused, milline see väärtus võib olla.
6. Tasandil on antud sirge  $l$  ja ringjoon, millel pole sirgega ühiseid punkte. Olgu  $AB$  ringjoone diameeter, mis on sirgega  $l$  risti, kusjuures punkt  $B$  asub sirgele  $l$  lähemal kui punkt  $A$ . Ringjoonel valitakse punktidest  $A$  ja  $B$  erinev punkt  $C$ . Sirge  $AC$  lõikab sirget  $l$  punktis  $D$ . Punktist  $D$  tõmmatud sirge puutub ringjoont punktis  $E$ , mis asub sirgest  $AC$  samal pool nagu punkt  $B$ . Sirge  $EB$  lõikab sirget  $l$  punktis  $F$  ning sirge  $FA$  lõikab ringjoont teist korda punktis  $G$ . Tõesta, et punktiga  $G$  sirge  $AB$  suhtes sümmeetriline punkt asub sirgel  $FC$ .