Отборочный конкурс в команду Эстонии на ММО'2004

Тарту, 14–15 мая 2004 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

Первый день

1. Пусть $k > 1$ фиксированное натуральное число. Найти все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие условию $P(x^k) = \big(P(x)\big)^k$ для любого действительного числа x.

2. Точка O является центром описанной окружности остроугольного треугольника ABC, прямые AO и BC пересекаются в точке K. На сторонах AB и AC берут соответственно точки L и M так, что $|KL| = |KB|$ и $|KM| = |KC|$. Доказать, что отрезки LM и BC параллельны.

3. Для каких натуральных чисел n можно провести n отрезков между вершинами правильного $2n$-угольника так, чтобы каждая вершина являлась концом ровно одного отрезка, и эти отрезки были попарно различной длины?

Отборочный конкурс в команду Эстонии на ММО'2004

Тарту, 14–15 мая 2004 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

Второй день

4. Обозначим

$$f(m) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \cos \frac{k\pi}{2m+1} \,.$$

   При каких положительных целых m значение $f(m)$ является рациональным числом?

5. Найти все такие натуральные числа n, при которых количество всех положительных делителей числа НОК$\,(1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ равно 2^k, где k некоторое неотрицательное целое число.

6. Назовем *футболоидом* выпуклый многогранник, имеющий следующие свойства.
   (1) Каждая грань является либо правильным пятиугольником, либо правильным шестиугольником.
   (2) У каждой пятиугольной грани все соседние грани — шестиугольные (две грани назовем *соседними*, если они имеют общее ребро).

   Найти все возможные числа пятиугольных и шестиугольных граней футболоида.