IMO'2004 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 14.–15. mail 2004. a.

Ülesannete lahendused

Esimene päev

1. *Vastus:* $P(x) = 0$ ja $P(x) = x^n$, kus n on suvaline mittenegatiivne täisarv; paaritu k korral lisaks ka $P(x) = -x^n$.

   Olgu polünoomi $P(x)$ aste $n > 0$, siis

   $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 ,$$

   kus $a_n \neq 0$.

   Olgu i suurim n-st väiksem indeks, mille korral $a_i \neq 0$ (oletame, et selline indeks i leidub), siis

   $$P(x^k) = a_n x^{kn} + a_i x^{ki} + a_{i-1} x^{ki-k} + \ldots + a_1 x^k + a_0$$

   ning

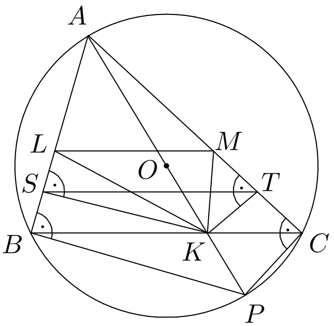
   $$\big(P(x)\big)^k = (a_n x^n + a_i x^i + a_{i-1} x^{i-1} + \ldots + a_1 x + a_0)^k .$$

   Leiame liikme $x^{(k-1)n+i}$ kordaja mõlemas polünoomis. Kuna $i < n$, siis $kn > (k-1)n+i > ki$ ning polünoomis $P(x^k)$ on selle liikme kordaja järelikult 0. Samas astme $(P(x))^k$ lahtikorrutamisel saame liikme $x^{(k-1)n+i}$ parajasti siis, kui $k-1$ tegurist võtta liige $a_n x^n$ ning ühest tegurist liige $a_i x^i$; seega polünoomis $(P(x))^k$ on selle liikme kordaja $k a_n^{k-1} a_i \neq 0$. Saadud vastuolu näitab, et niisugust indeksit i ei leidu ning polünoom $P(x)$ on kujul $P(x) = a_n x^n$. Paneme ka tähele, et kui polünoomi $P(x)$ aste n on 0, siis samuti $P(x) = a_0 = a_n x^n$.

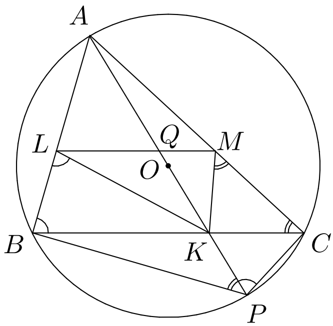
   Võrdusest $P(x^k) = \big(P(x)\big)^k$ saame nüüd, et $a_n x^{nk} = a_n^k x^{nk}$ iga reaalarvu x korral, s.t. $a_n = a_n^k$ ehk $a_n(a_n^{k-1} - 1) = 0$. Seega paaritu k korral $a_n \in \{-1, 0, 1\}$ ($a_n = 0$ on võimalik ainult siis, kui $n = 0$) ning paarisarvulise k korral $a_n \in \{0, 1\}$.

2. *Lahendus 1.* Tõmbame kolmnurkadele KBL ja KCM tipust K kõrgused, olgu nende aluspunktid vastavalt S ja T. Samuti pikendame lõiku AK lõikumiseni kolmnurga ABC ümberringjoonega punktis P (vt. joonist 1). Et

lõik AP on kolmnurga ümberringjoone diameeter, siis kolmnurgad ABP ja ACP on täisnurksed. Kolmnurk ASK on sarnane kolmnurgaga ABP ning kolmnurk ATK on sarnane kolmnurgaga ACP (nende küljed on vastavalt paralleelsed), mistõttu $\frac{|AS|}{|AB|} = \frac{|AK|}{|AP|} = \frac{|AT|}{|AC|}$. Seega on ka kolmnurk AST sarnane kolmnurgaga ABC ning järelikult $ST \parallel BC$. Et $|LS| = |SB|$ ja $|MT| = |TC|$, siis ka $LM \parallel BC$.



Joonis 1



Joonis 2

Lahendus 2. Konstrueerime punktid S, T ja P samuti nagu eelmises lahenduses (vt. joonist 1). Et $\angle ASK = \angle ATK = 90°$, siis $ASKT$ on kõõlnelinurk. Nüüd $\angle KST = \angle KAT = \angle PAC = \angle PBC$ ja $\angle KTS = \angle KAS = \angle PAB = \angle PCB$, millest saame, et kolmnurgad KST ja PBC on sarnased, kuna nende vastavad nurgad on võrdsed. Arvestades, et $KS \parallel PB$ ja $KT \parallel PC$, saame, et $ST \parallel BC$. Võrdustest $|LS| = |SB|$ ja $|MT| = |TC|$ saame nüüd, et $LM \parallel BC$.

Lahendus 3. Olgu $\angle ABC = \beta$ ja $\angle ACB = \gamma$. Lõigaku sirge AK kolmnurga ABC ümberringjoont teistkordselt punktis P (vt. joonist 2), siis lõik AP on ringjoone diameeter ja kõik temale toetuvad piirdenurgad on täisnurgad. Kolmnurgas KBP on siis $\angle KBP = 90° - \beta$ ning $\angle KPB = \angle APB = \angle ACB = \gamma$. Siinusteoreemist kolmnurgas KBP saame, et $\frac{|KB|}{\sin\gamma} = \frac{|KP|}{\sin(90° - \beta)}$. Analoogiliselt saame kolmnurgast KCD, et $\frac{|KC|}{\sin\beta} = \frac{|KP|}{\sin(90° - \gamma)}$. Niisiis $|KB| \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\gamma} = |KC| \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\beta}$. Korrutades selle võrduse pooli arvuga $2\sin\beta\sin\gamma$ saame, et $|KB| \cdot \sin 2\beta = |KC| \cdot \sin 2\gamma$. Teisalt aga on kolmnurga KBL tipust L tõmmatud kõrguse pikkus

$|KL| \cdot \sin \angle LKB = |KB| \cdot \sin(180^\circ - 2\beta) = |KB| \cdot \sin 2\beta$ ning kolmnurga KCM tipust M tõmmatud kõrguse pikkus on analoogiliselt $|KC| \cdot \sin 2\gamma$. Seega on punktid L ja M sirgest BC võrdsel kaugusel, mistõttu $LM \parallel BC$.

Lahendus 4. Tähistame $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$, $\gamma = \angle ACB$ ning $\alpha' = \angle OBC = \angle OCB$, $\beta' = \angle OCA = \angle OAC$, $\gamma' = \angle OAB = \angle OBA$. Näitame, et $\beta' = \frac{\pi}{2} - \beta$ ja $\gamma' = \frac{\pi}{2} - \gamma$. Olgu P punkt, kus kiir AK lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont (vt. joonist 2). Siis

$$\begin{aligned}\beta' &= \angle PAC = \frac{1}{2}\angle POC = \frac{1}{2}(\pi - \angle AOC) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle AOC = \\ &= \frac{\pi}{2} - \angle ABC = \frac{\pi}{2} - \beta\end{aligned}$$

ja analoogiliselt $\gamma' = \frac{\pi}{2} - \gamma$.

Et $\angle KLB = \angle KBL = \beta$ ja $\angle KMC = \angle KCM = \gamma$, siis $\angle LKB = \pi - 2\beta$ ja $\angle MKC = \pi - 2\gamma$. Kolmnurkadest AKB ja AKC saame nüüd vastavalt

$$\begin{aligned}\angle AKL &= \pi - \angle KAB - \angle ABK - \angle BKL = \\ &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) - \beta - (\pi - 2\beta) = \\ &= \beta + \gamma - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned}\angle AKM &= \pi - \angle KAC - \angle AKC - \angle CKM = \\ &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \gamma - (\pi - 2\gamma) = \\ &= \beta + \gamma - \frac{\pi}{2}\,,\end{aligned}$$

s.t. KA on nurga MKL poolitaja. Olgu AK ja LM lõikepunkt Q, siis nurgapoolitaja omadust kasutades saame

$$\frac{|LQ|}{|QM|} = \frac{|LK|}{|KM|} = \frac{|BK|}{|KC|}\,,$$

mistõttu $LM \parallel BC$.

Märkus: Näitamaks, et $\beta' = \frac{\pi}{2} - \beta$ ja $\gamma' = \frac{\pi}{2} - \gamma$, võime koostada ka võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} \beta' + \gamma' = \alpha \\ \gamma' + \alpha' = \beta \\ \alpha' + \beta' = \gamma \end{cases}.$$

Liites võrrandite vastavad pooled, saame $2(\alpha' + \beta' + \gamma') = \alpha + \beta + \gamma = \pi$, millest $\alpha' + \beta' + \gamma' = \frac{\pi}{2}$. Seega $\beta = \gamma' + \alpha' = \frac{\pi}{2} - \beta'$, $\gamma = \alpha' + \beta' = \frac{\pi}{2} - \gamma'$, ehk $\beta' = \frac{\pi}{2} - \beta$, $\gamma' = \frac{\pi}{2} - \gamma$.

3. *Vastus:* $n = 4k$ ja $n = 4k + 1$, kus k on suvaline positiivne täisarv.

   Lahendus 1. Nummerdame hulknurga tipud arvudega $0, 1, \ldots, 2n-1$, vaadeldes neid *modulo* $2n$. Hulknurga kaht tippu ühendava lõigu *kaaluks* nimetame vähimat külgede arvu, mis tuleb läbida mööda hulknurga rajajoont lõigu ühest otspunktist teise minekul. Paneme tähele, et kaks vaadeldavat lõiku on võrdse kaaluga parajasti siis, kui nad on võrdse pikkusega, seega võime lõikude pikkuste asemel edaspidi vaadelda nende kaale.

   Oletame kõigepealt, et mingi n jaoks on nõutud omadusega lõikude komplekt leitud. Et iga lõigu kaal on üks arvudest $1, 2, \ldots, n$ ning komplektis on n lõiku paarikaupa erinevate kaaludega, siis peavad need kaalud olema parajasti $1, \ldots, n$. Iga $i = 1, \ldots, n$ korral olgu x_i ja $x_i + i$ selle lõigu otspunktid, mille kaal on i. Saame

$$\begin{aligned} &x_1 + \ldots + x_n + (x_1 + 1) + \ldots + (x_n + n) \equiv \\ &\qquad \equiv 0 + 1 + \ldots + (2n - 1) \pmod{2n}. \end{aligned}$$

Et võrdus, mis kehtib *modulo* $2n$, kehtib ka *modulo* 2, siis

$$\begin{aligned} \frac{(2n-1)2n}{2} &= 0 + 1 + \ldots + (2n-1) \equiv \\ &\equiv x_1 + \ldots + x_n + (x_1 + 1) + \ldots + (x_n + n) = \\ &= 2(x_1 + \ldots + x_n) + 1 + \ldots + n \equiv \\ &\equiv 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \pmod{2}. \end{aligned}$$

Korrutades saadud kongruentsi 2-ga, saame

$$(2n-1)2n \equiv n(n+1) \pmod{4}.$$

Siit näeme, et kui $n = 4k+2$, siis vasak pool on võrdne nulliga, kuid parem pool mitte; kui aga $n = 4k+3$, siis on parem pool võrdne nulliga, aga vasak pool mitte. Järelikult niisugustel juhtudel nõutavat lõikude komplekti ei leidu.

Näitame nüüd, et kui $n = 4k$, siis nõutav lõikude komplekt alati leidub. Järgnevalt on näidatud kaks sobivat lõikude komplekti sellise n jaoks. Neis tabelites on lõigud esitatud blokkide kaupa (ühes blokis olevad lõigud on omavahel paralleelsed). Bloki igas reas kirjutis (x, y) näitab, et lõik tõmmatakse tippude x ja y vahele, järgnev arv on selle lõigu kaal ning bloki lõpus looksulu järel olev arv näitab lõikude arvu blokis.

1. variant:

$$\left.\begin{array}{ll}(0,4k) & 4k\end{array}\right\}1$$

$$\left.\begin{array}{lr}(2k-1,2k) & 1\\ (2k-3,2k+2) & 5\\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill}\\ (1,4k-2) & 4k-3\end{array}\right\}k \qquad \left.\begin{array}{lr}(6k-1,6k+1) & 2\\ (6k-3,6k+3) & 6\\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill}\\ (4k+1,8k-1) & 4k-2\end{array}\right\}k$$

$$\left.\begin{array}{lr}(4k-1,4k+2) & 3\\ (4k-3,4k+4) & 7\\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill}\\ (2k+1,6k) & 4k-1\end{array}\right\}k \qquad \left.\begin{array}{lr}(2,8k-2) & 4\\ (4,8k-4) & 8\\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill}\\ (2k-2,6k+2) & 4k-4\end{array}\right\}k-1$$

2. variant:

$$\left.\begin{array}{ll}(0,4k) & 4k\end{array}\right\}1$$

$$\left.\begin{array}{ll}(k,k+1) & 1\end{array}\right\}1$$

$$\left.\begin{array}{ll}(4k+1,6k+1) & 2k\end{array}\right\}1 \qquad \left.\begin{array}{lr}(k+2,7k) & 2k+2\\ (k+3,7k-1) & 2k+4\\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill}\\ (2k,6k+2) & 4k-2\end{array}\right\}k-1$$

$$\left.\begin{array}{lr}(1,8k-1) & 2\\ (2,8k-2) & 4\\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill}\\ (k-1,7k+1) & 2k-2\end{array}\right\}k-1 \qquad \left.\begin{array}{lr}(4k-1,4k+2) & 3\\ (4k-2,4k+3) & 5\\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill}\\ (2k+1,6k) & 4k-1\end{array}\right\}2k-1$$

Lõpuks näitame, et kui $n = 4k + 1$, siis nõutav lõikude komplekt samuti leidub. Järgnevalt on jällegi näidatud kaks sobivat lõikude komplekti.

1. variant:

$$\left.\begin{array}{ll}(0,4k+1) & 4k+1\end{array}\right\}1 \qquad \left.\begin{array}{ll}(5k+1,7k+1) & 2k\end{array}\right\}1$$

$$\left.\begin{array}{lr}(k+1,k) & 1\\ (k+2,k-1) & 3\\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ (2k,1) & 2k-1\end{array}\right\}k \qquad \left.\begin{array}{lr}(2k+1,8k+1) & 2k+2\\ (2k+2,8k) & 2k+4\\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ (3k,7k+2) & 4k\end{array}\right\}k$$

$$\left.\begin{array}{lr}(5k,5k+2) & 2\\ (5k-1,5k+3) & 4\\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ (4k+2,6k) & 2k-2\end{array}\right\}k-1 \qquad \left.\begin{array}{lr}(4k,6k+1) & 2k+1\\ (4k-1,6k+2) & 2k+3\\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ (3k+1,7k) & 4k-1\end{array}\right\}k$$

2. variant:

$$\left.\begin{array}{ll}(0,4k+1) & 4k+1\end{array}\right\}1$$

$$\left.\begin{array}{ll}(k,k+1) & 1\end{array}\right\}1$$

$$\left.\begin{array}{ll}(4k+2,6k+2) & 2k\end{array}\right\}1 \qquad \left.\begin{array}{lr}(k+2,7k+2) & 2k+2\\ (k+3,7k+1) & 2k+4\\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ (2k+1,6k+3) & 4k\end{array}\right\}k$$

$$\left.\begin{array}{lr}(1,8k+1) & 2\\ (2,8k) & 4\\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ (k-1,7k+3) & 2k-2\end{array}\right\}k-1 \qquad \left.\begin{array}{lr}(4k,4k+3) & 3\\ (4k-1,4k+4) & 5\\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ (2k+2,6k+1) & 4k-1\end{array}\right\}2k-1$$

Lahendus 2. Tõestame teisel viisil, et juhul, kui $n \equiv 2 \pmod 4$ või $n \equiv 3 \pmod 4$, nõutavat lõikude komplekti ei leidu.

Värvime $2n$-nurga tipud vaheldumisi mustaks ja valgeks. Defineerides lõigu kaalu samuti nagu esimeses lahenduses, saame, et paarituarvulise kaaluga lõigud ühendavad eri värvi tippe, paarisarvulise kaaluga lõigud aga sama värvi tippe. Oletame, et nõutud lõikude komplekt on olemas. Kuna kokku on kumbagi värvi tippe ühepalju ning kõigi paarituarvulise kaaluga lõikude otspunktide seas on kumbagi värvi tippe samuti ühepalju, siis ka kõigi paarisarvulise kaaluga lõikude otspunktide seas on kumbagi värvi tippe ühepalju. Sellest järeldub, et lõike, mis ühendavad valgeid tippe omavahel, on niisama palju kui lõike, mis ühendavad musti tippe omavahel. Järelikult on paarisarvulise pikkusega lõike paarisarv. Seega arvude $1, 2, \ldots, n$ seas on paarisarv paarisarve, mis on võimalik vaid juhul, kui $n \equiv 0 \pmod 4$ või $n \equiv 1 \pmod 4$.

Nõutava lõikude komplekti olemasolu $n \equiv 0 \pmod 4$ ja $n \equiv 1 \pmod 4$ korral näitame samuti nagu esimeses lahenduses.

Teine päev

4. *Vastus:* kõikide positiivsete täisarvude m korral.

   Lahendus 1. Fikseerime positiivse täisarvu m suvaliselt ning võtame

$$a = \cos \frac{\pi}{2(2m+1)} \neq 0 \, .$$

Kasutades vahepeal valemit

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big) \, ,$$

saame võrduste ahela

$$\begin{aligned}
f(m) \cdot a &= \left(\sum_{k=1}^{m} (-1)^k \cos \frac{k\pi}{2m+1}\right) \cdot a = \\
&= \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \cos \frac{k\pi}{2m+1} \cos \frac{\pi}{2(2m+1)} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \left(\cos\Big(\frac{k\pi}{2m+1} - \frac{\pi}{2(2m+1)}\Big) + \right. \\
&\qquad \left. + \cos\Big(\frac{k\pi}{2m+1} + \frac{\pi}{2(2m+1)}\Big)\right) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \left(\cos \frac{(2k-1)\pi}{2(2m+1)} + \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(2m+1)}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(-\cos \frac{\pi}{2(2m+1)} + (-1)^m \cos \frac{(2m+1)\pi}{2(2m+1)}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\big(-a + (-1)^m \cdot 0\big) = -\frac{1}{2}\, a \, .
\end{aligned}$$

Seega $f(m) = -\dfrac{1}{2}$ iga m korral.

Lahendus 2. Kasutades seost $-\cos x = \cos(\pi - x)$, saame

$$-\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ paaritu}}}^{m} \cos\frac{k\pi}{2m+1} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ paaritu}}}^{m} \cos\frac{(2m+1-k)\pi}{2m+1} = \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \text{ paaris}}}^{2m} \cos\frac{k\pi}{2m+1}\,.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} f(m) &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \cos\frac{k\pi}{2m+1} = \\ &= -\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ paaritu}}}^{m} \cos\frac{k\pi}{2m+1} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ paaris}}}^{m} \cos\frac{k\pi}{2m+1} = \\ &= \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \text{ paaris}}}^{2m} \cos\frac{k\pi}{2m+1} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ paaris}}}^{m} \cos\frac{k\pi}{2m+1} = \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ paaris}}}^{2m} \cos\frac{k\pi}{2m+1} = \sum_{k=1}^{m} \cos\frac{2k\pi}{2m+1}\,. \end{aligned}$$

Kasutades seost $\cos x = \cos(2\pi - x)$, saame nüüd

$$\begin{aligned} f(m) &= \sum_{k=1}^{m} \cos\Big(2\pi - \frac{2k\pi}{2m+1}\Big) = \sum_{k=1}^{m} \cos\frac{2(2m+1-k)\pi}{2m+1} = \\ &= \sum_{k=m+1}^{2m} \cos\frac{2k\pi}{2m+1}\,. \end{aligned}$$

Vaatleme koordinaattasandil korrapärast $(2m+1)$-nurka $A_0A_1\ldots A_{2m}$, mille tipud paiknevad ühikringjoonel keskpunktiga koordinaatide alguspunktis O, kusjuures tipp A_0 on punktis $(1,0)$. Siis iga $k = 0,\ldots,2m$ korral

$$\overrightarrow{OA_k} = \Big(\cos\frac{2k\pi}{2m+1},\, \sin\frac{2k\pi}{2m+1}\Big)\,.$$

Vektorite $\overrightarrow{OA_k}$ valiku põhjal

$$\sum_{k=0}^{2m} \overrightarrow{OA_k} = \vec{0}\,.$$

Seega ka nende vektorite x-koordinaatide summa on 0, s.t.

$$0 = \sum_{k=0}^{2m} \cos \frac{2k\pi}{2m+1} = 1 + \sum_{k=1}^{m} \cos \frac{2k\pi}{2m+1} + \sum_{k=m+1}^{2m} \cos \frac{2k\pi}{2m+1} =$$
$$= 1 + 2f(m) \; .$$

Seega $f(m) = -\dfrac{1}{2}$.

Lahendus 3. Võtame kasutusele abifunktsiooni

$$g(m) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sin \frac{k\pi}{2m+1} \; .$$

Siis

$$f(m) + ig(m) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \Big(\cos \frac{k\pi}{2m+1} + i \sin \frac{k\pi}{2m+1} \Big) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} (-1)^k e^{\frac{ik\pi}{2m+1}} = \sum_{k=1}^{m} \big(-e^{\frac{i\pi}{2m+1}} \big)^k =$$
$$= -e^{\frac{i\pi}{2m+1}} \cdot \frac{1 - \big(-e^{\frac{i\pi}{2m+1}} \big)^m}{1 - \big(-e^{\frac{i\pi}{2m+1}} \big)} =$$
$$= \frac{e^{\frac{i\pi}{2m+1}} \big((-1)^m e^{\frac{im\pi}{2m+1}} - 1 \big)}{1 + e^{\frac{i\pi}{2m+1}}}$$

ja analoogiliselt

$$f(m) - ig(m) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \Big(\cos \frac{k\pi}{2m+1} - i \sin \frac{k\pi}{2m+1} \Big) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} (-1)^k e^{-\frac{ik\pi}{2m+1}} \sum_{k=1}^{m} \big(-e^{-\frac{i\pi}{2m+1}} \big)^k =$$
$$= -e^{-\frac{i\pi}{2m+1}} \cdot \frac{1 - \big(-e^{-\frac{i\pi}{2m+1}} \big)^m}{1 - \big(-e^{-\frac{i\pi}{2m+1}} \big)} =$$
$$= \frac{e^{-\frac{i\pi}{2m+1}} \big((-1)^m e^{-\frac{im\pi}{2m+1}} - 1 \big)}{1 + e^{-\frac{i\pi}{2m+1}}} \; .$$

Nüüd

$$
\begin{aligned}
2f(m) &= \big(f(m)+ig(m)\big)+\big(f(m)-ig(m)\big)= \\
&= \frac{e^{\frac{i\pi}{2m+1}}\Big((-1)^m e^{\frac{im\pi}{2m+1}}-1\Big)}{1+e^{\frac{i\pi}{2m+1}}}+\frac{e^{-\frac{i\pi}{2m+1}}\Big((-1)^m e^{-\frac{im\pi}{2m+1}}-1\Big)}{1+e^{-\frac{i\pi}{2m+1}}}= \\
&= \frac{(-1)^m e^{\frac{i(m+1)\pi}{2m+1}}-e^{\frac{i\pi}{2m+1}}}{1+e^{\frac{i\pi}{2m+1}}}+\frac{(-1)^m e^{-\frac{i(m+1)\pi}{2m+1}}-e^{-\frac{i\pi}{2m+1}}}{1+e^{-\frac{i\pi}{2m+1}}}= \\
&= \frac{\Big((-1)^m e^{\frac{i(m+1)\pi}{2m+1}}-e^{\frac{i\pi}{2m+1}}\Big)\Big(1+e^{-\frac{i\pi}{2m+1}}\Big)}{\Big(1+e^{\frac{i\pi}{2m+1}}\Big)\Big(1+e^{-\frac{i\pi}{2m+1}}\Big)}+ \\
&\quad+\frac{\Big((-1)^m e^{-\frac{i(m+1)\pi}{2m+1}}-e^{-\frac{i\pi}{2m+1}}\Big)\Big(1+e^{\frac{i\pi}{2m+1}}\Big)}{\Big(1+e^{\frac{i\pi}{2m+1}}\Big)\Big(1+e^{-\frac{i\pi}{2m+1}}\Big)}= \\
&= \frac{(-1)^m e^{\frac{i(m+1)\pi}{2m+1}}+(-1)^m e^{\frac{im\pi}{2m+1}}-e^{\frac{i\pi}{2m+1}}-1}{2+e^{\frac{i\pi}{2m+1}}+e^{-\frac{i\pi}{2m+1}}}+ \\
&\quad+\frac{(-1)^m e^{-\frac{i(m+1)\pi}{2m+1}}+(-1)^m e^{-\frac{im\pi}{2m+1}}-e^{-\frac{i\pi}{2m+1}}-1}{2+e^{\frac{i\pi}{2m+1}}+e^{-\frac{i\pi}{2m+1}}}= \\
&= -1+(-1)^m\cdot\frac{e^{\frac{i(m+1)\pi}{2m+1}}+e^{\frac{im\pi}{2m+1}}+e^{-\frac{i(m+1)\pi}{2m+1}}+e^{-\frac{im\pi}{2m+1}}}{2+e^{\frac{i\pi}{2m+1}}+e^{-\frac{i\pi}{2m+1}}}\,.
\end{aligned}
$$

Kuna

$$
e^{ix}+e^{-ix}=\cos x+i\sin x+\cos x-i\sin x=2\cos x\ ,
$$

siis

$$
\begin{aligned}
&e^{\frac{i(m+1)\pi}{2m+1}}+e^{\frac{im\pi}{2m+1}}+e^{-\frac{i(m+1)\pi}{2m+1}}+e^{-\frac{im\pi}{2m+1}}= \\
&\quad=2\Big(\cos\frac{(m+1)\pi}{2m+1}+\cos\frac{m\pi}{2m+1}\Big)=2\cdot 0=0\ ,
\end{aligned}
$$

sest $\dfrac{(m+1)\pi}{2m+1}+\dfrac{m\pi}{2m+1}=\pi$. Järelikult $2f(m)=-1$, kust $f(m)=-\dfrac{1}{2}$.

5. *Vastus:* 1, 2, 3 ja 8.

Lahendus 1. Olgu $\mathbb{P}$ kõigi algarvude hulk. Tähistagu $\delta(m)$ naturaalarvu m positiivsete jagajate arvu ning olgu $A(n)=\delta(\mathrm{VÜK}\,(1,\ldots,n))$. Tähistagu veel $p \triangleright m$ algarvu p astendajat arvu m esituses algarvude astmete korrutisena. Paneme tähele, et

$$A(n) = \delta(\text{VÜK}\,(1, \ldots, n)) = \delta\left(\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\max(p\triangleright 1,\ldots,p\triangleright n)}\right) =$$

$$= \delta\left(\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\lfloor \log_p n\rfloor}\right) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \bigl(\lfloor \log_p n\rfloor + 1\bigr)\ .$$

Seega $A(n)$ on 2 aste parajasti siis, kui kõik arvud kujul $\lfloor \log_p n\rfloor + 1$, kus $p \in \mathbb{P}$, on 2 astmed. Olgu $\lfloor \log_2 n\rfloor + 1 = 2^k$ ja $\lfloor \log_3 n\rfloor + 1 = 2^l$. Kuna $\log_2 n \geqslant \log_3 n$, siis $k \geqslant l$. Vaatleme kahte juhtu.
Kui $k = l$, siis

$$\lfloor \log_2 n\rfloor = \lfloor \log_3 n\rfloor\ , \tag{1}$$

mis kehtib $n = 1$ ja $n = 3$ korral. Vahetu kontrolliga veendume, et $n = 2$ ja $4 \leqslant n < 8$ korral võrdus (1) ei kehti. Kui $n \geqslant 8$, siis

$$\log_2 n - 3 = \log_2 n - \log_2 8 = \log_2 3(\log_3 n - \log_3 8) > \log_3 n - \log_3 8\ ,$$

mistõttu $\log_2 n - \log_3 n > 3 - \log_3 8 > 3 - 2 = 1$. Seega iga $n \geqslant 8$ korral $\lfloor \log_2 n\rfloor > \lfloor \log_3 n\rfloor$. Saime, et (1) kehtib parajasti $n = 1$ ja $n = 3$ korral.
Olgu nüüd $k > l$. Siis $\lfloor \log_2 n\rfloor + 1 \geqslant 2\bigl(\lfloor \log_3 n\rfloor + 1\bigr)$ ehk

$$\lfloor \log_2 n\rfloor \geqslant 2\lfloor \log_3 n\rfloor + 1\ , \tag{2}$$

mis kehtib $n = 2$ ja $n = 8$ korral. Vahetu kontrolliga veendume, et $4 \leqslant n \leqslant 7$ ja $9 \leqslant n < 27$ korral võrratus (2) ei kehti. Kui $n \geqslant 27$, siis

$$\log_2 n - \log_2 27 = \log_2 3(\log_3 n - \log_3 27) < 2(\log_3 n - 3) = 2\log_3 n - 6\ ,$$

mistõttu $2\log_3 n - \log_2 n > 6 - \log_2 27 > 6 - 5 = 1$. Seega iga $n \geqslant 27$ korral $\lfloor \log_2 n\rfloor < \lfloor 2\log_3 n\rfloor \leqslant 2\lfloor \log_3 n\rfloor + 1$. Saime, et (2) kehtib parajasti $n = 2$ ja $n = 8$ korral.
Niisiis jäid n võimalike väärtustena sõelale ainult 1, 2, 3 ja 8. Kontrollides saame $A(1) = 1 = 2^0$, $A(2) = 2 = 2^1$, $A(3) = 4 = 2^2$ ja $A(8) = 32 = 2^5$. Seega kõik leitud lahendid sobivad.

Lahendus 2. Samuti nagu eelmises lahenduses veendume kõigepealt, et piisab leida sellised arvud n, mille korral kõik arvud kujul $\lfloor \log_p n\rfloor + 1$, kus p on mingi algarv, on 2 astmed.

Olgu $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 = 2^k$. Siis kehtib võrratus $2^{2^k-1} \leqslant n < 2^{2^k}$. Kui leidub selline algarv p, et $p^2 \leqslant n < p^3$, siis saame $\lfloor \log_p n \rfloor + 1 = 3$, s.t. selle p korral $\lfloor \log_p n \rfloor + 1$ ei ole 2 aste. Uurime, milliste n väärtuste korral niisugune algarv p leidub.

On teada, et mistahes naturaalarvu $N > 1$ korral leidub arvude N ja $2N$ vahel vähemalt üks algarv. Seega $k > 3$ korral leidub selline algarv p_0, et $2^{2^{k-1}-2} < p_0 < 2^{2^{k-1}-1}$ ning $2^{2^k-4} < p_0^2 < 2^{2^k-2}$. Seega juhul, kui $3 \cdot 2^{k-1} - 6 \geqslant 2^k$, saame

$$p_0^2 \cdot p_0 > 2^{2^k-4} \cdot 2^{2^{k-1}-2} = 2^{3 \cdot 2^{k-1}-6} \geqslant 2^{2^k} > n$$

ning otsitav algarv on leitud. Võrratus $3 \cdot 2^{k-1} - 6 \geqslant 2^k$ aga kehtib alati, kui $2^{k-1} > 6$ ehk $k > 3$.

Jääb üle vaadata läbi juhud, kus $k \leqslant 3$. Võimalikud n väärtused $k = 0, 1, 2, 3$ korral asuvad vastavalt poollõikudel $[1, 2)$, $[2, 4)$, $[8, 16)$ ja $[128, 256)$. On lihtne kontrollida, et n väärtused 1, 2, 3 ja 8 sobivad, 8-st suuremad väärtused aga enam mitte, sest $3^2 = 9 < 16 < 3^3$ ja $11^2 < 128 < 256 < 11^3$.

6. *Vastus:* viisnurkseid tahke on 12 ja kuusnurkseid 20.

   Lahendus 1. Näitame, et leidub futboloid, millel on 12 viisnurkset ja 20 kuusnurkset tahku. Selleks lähtume korrapärasest ikosaeedrist ning eraldame iga tipu juurest, $\frac{1}{3}$ servapikkuse kauguselt, korrapärase püramiidi. Sellega tekib ikosaeedri 12 tipu asemel 12 korrapärast viisnurka, ikosaeedri 20 tahku aga muutuvad 20 korrapäraseks kuusnurgaks. Iga viisnurkse tahu naabertahud on kõik kuusnurksed.

   Edasi näitame, et see on ka ainus võimalus. Olgu B mingi futboloid. Vaatleme B suvalist tippu; kuulugu see x viisnurksele ja y kuusnurksele tahule. Siis $x + y \geqslant 3$, sest hulktahuka iga tipp kuulub vähemalt 3 tahule. Et viisnurkse tahu sisenurga suurus on $108°$ ja kuusnurksel tahul $120°$, siis $x \cdot 108° + y \cdot 120° < 360°$. Seega $x + y \leqslant 3$, kusjuures $x > 0$. Järelikult $x + y = 3$ ehk futboloidi iga tipp kuulub täpselt 3 tahule, millest vähemalt üks on viisnurkne. Et need 3 tahku on paarikaupa üksteise naabertahud ning viisnurksed tahud eelduse põhjal naabertahud olla ei saa, siis kuulub iga tipp täpselt ühele viisnurksele ja kahele kuusnurksele tahule.

   Vaatleme nüüd suvalist kuusnurkset tahku. Iga tema tipp kuulub eelneva põhjal veel ühele viisnurksele ja ühele kuusnurksele tahule. Järelikult on kuusnurkse tahu naabertahud vaheldumisi viisnurksed ja kuusnurksed, kumbagi neist on täpselt 3.

Katame nüüd iga viisnurkse tahu korrapärase viisnurkse püramiidiga, mille külgservad on selle tahu kuusnurksete naabertahkude servade jätkuks. Nii muutuvad kuusnurksed tahud võrdkülgseteks kolmnurkseteks tahkudeks ja viisnurksed tahud asenduvad tippudega, millest igaühest väljub viis serva. Et futboloidi viisnurkse tahu mistahes kaks naabertahku, mis piirnevad viisnurga kõrvutiasetsevate servadega, on omavahel ühe ja sama nurga all (kaks korrapärast kuusnurka ja üks korrapärane viisnurk saavad põhimõtteliselt ainult ühel viisil tahkudena ühte tippu kokku tulla), on omavahel ühe ja sama nurga all ka uue hulktahuka ühist tippu omavad kolmnurksed tahud. Järelikult on tekkinud tahukas korrapärane ikosaeeder. Ikosaeedril on 12 tippu ja 20 tahku, niisiis peab futboloidil B olema 12 viisnurkset ja 20 kuusnurkset tahku.

Lahendus 2. Esitame teistsuguse konstruktsiooni lahenduse 1 viimases lõigus tehtu asemele. Vaatleme hulktahukat, mille tippudeks on futboloidi B kuusnurksete tahkude keskpunktid — ütleme, et tipp *vastab* B kuusnurksele tahule — ning kaks tippu on ühendatud servaga parajasti siis, kui B vastavad kuusnurksed tahud on teineteise naabrid. Futboloidi B suvalise viisnurkse tahu kuusnurksetele naabertahkudele vastavad tipud moodustavad uue hulktahuka tahu, mis on korrapärane viisnurk — ütleme, et see tahk *vastab* B viisnurksele tahule. Et futboloidi igal kuusnurksel tahul on 3 kuusnurkset naabertahku, siis uue hulktahuka igast tipust lähtub 3 serva ning järelikult iga tipp kuulub 3 tahule. Ilmselt vastavad need 3 tahku parajasti sellele tipule vastava B kuusnurkse tahu viisnurksetele naabertahkudele.

Et futboloidi igalt kuusnurkselt tahult saame ainult kuusnurkseid tahke mööda liikuda mistahes teisele kuusnurksele tahule, siis on saadud keha sidus, s.t. tõepoolest hulktahukas, mille kõik tahud on korrapärased viisnurgad ning iga tipp kuulub täpselt 3 tahule. Järelikult on tegemist korrapärase dodekaeedriga. Seega B kuusnurkseid tahke on niisama palju kui dodekaeedri tippe, s.t. 20, ning viisnurkseid tahke on niisama palju kui dodekaeedri tahke, s.t. 12.

Lahendus 3. Esitame kombinatoorse arutluse lahenduse 1 viimases lõigus tehtud konstruktsiooni asemele. Olgu n futboloidi B tippude arv, m servade arv ning f tahkude arv. Olgu m_1 selliste servade arv, mis eraldavad viisnurkset ja kuusnurkset tahku, ning m_2 selliste servade arv, mis eraldavad kaht kuusnurkset tahku. Olgu f_1 ja f_2 vastavalt viisnurksete ja kuusnurksete tahkude arv. Paneme tähele järgmisi seoseid nende arvude vahel.

Kuna futboloidi iga tipp kuulub täpselt 3 tahule, siis iga tipp on täpselt 3 serva otspunktiks. Et igal serval on 2 otspunkti, siis $2m = 3n$.

Servi, mis eraldavad viisnurkset ja kuusnurkset tahku, on ühelt poolt $5f_1$, sest igal viisnurksel tahul on 5 kuusnurkset naabertahku, teiselt poolt aga $3f_2$, sest igal kuusnurksel tahul on 3 viisnurkset naabertahku. Järelikult $5f_1 = 3f_2 = m_1$.

Servi, mis eraldavad kaht kuusnurkset tahku, on $\dfrac{3f_2}{2}$, sest igal kuusnurksel tahul on 3 kuusnurkset naabertahku. Seega $3f_2 = 2m_2$.

Nüüd saame koostada võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2m = 3n \\ 5f_1 = 3f_2 = m_1 = 2m_2 \\ f_1 + f_2 = f \\ m_1 + m_2 = m \\ n - m + f = 2 \end{cases} ,$$

kus viimane võrrand esitab Euleri võrdust kumera hulktahuka jaoks. Selle võrrandisüsteemi lahendamisel saame muuhulgas $f_1 = 12$ ja $f_2 = 20$.

Lahendus 4. Esitame geomeetrilise arutluse lahenduse 1 viimases lõigus tehtud konstruktsiooni asemele. Olgu F_1 ja F_2 futboloidid, millel on ühine tahk T, millest nad mõlemad asuvad samal pool ning mille iga servaga piirnevad mõlemas futboloidis sama servade arvuga tahud. Kuna kaks kuusnurka ja üks viisnurk saavad põhimõtteliselt ainult ühel viisil tahkudena ühte tippu kokku tulla, siis järeldub sellest, et T naabertahud futboloidides F_1 ja F_2 langevad kokku. Jätkates seda arutlust tahu T naabertahkude jaoks, naabertahkude naabertahkude jaoks jne. leiame, et $F_1 = F_2$.

Olgu nüüd A lahenduse 1 algul konstrueeritud futboloid ning B suvaline futboloid. Ilmselt saab sarnasusteisendusega (ühtlane suurendamine-vähendamine, nihe ja pööre) kujutada futboloidi B futboloidiks B' nii, et B' mingi tahk langeks kokku futboloidi A mingi tahuga, A ja B' asetseksid sellest tahust samal pool ning selle tahu servadega piirneksid mõlemas futboloidis sama servade arvuga hulknurgad. Eelmise lõigu põhjal siis $B' = A$. Et mainitud teisendus ei muuda tahuka etteantud servade arvuga tahkude arvu, on futboloidil B niisama palju viisnurkseid ja kuusnurkseid tahke kui futboloidil A — vastavalt 12 ja 20.