

# IMO'2004 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 14.–15. mail 2004. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

## Esimene päev

1. Olgu  $k > 1$  fikseeritud naturaalarv. Leia kõik polünoomid  $P(x)$ , mis rahuldavad tingimust  $P(x^k) = (P(x))^k$  iga reaalarvu  $x$  korral.
2. Teravnurkse kolmnurga  $ABC$  ümberringjoone keskpunkt on  $O$  ning sirged  $AO$  ja  $BC$  lõikuvad punktis  $K$ . Külgedel  $AB$  ja  $AC$  valitakse vastavalt punktid  $L$  ja  $M$  nii, et  $|KL| = |KB|$  ja  $|KM| = |KC|$ . Tõesta, et lõigud  $LM$  ja  $BC$  on paralleelsed.
3. Milliste naturaalarvude  $n$  korral saab korrapärase  $2n$ -nurga tippude vahele tõmmata  $n$  lõiku nii, et iga tipp on täpselt ühe lõigu otspunktiks ning need lõigud on paarikaupa erinevate pikkustega?

# IMO'2004 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 14.–15. mail 2004. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

## Teine päev

### 4. Tähistame

$$f(m) = \sum_{k=1}^m (-1)^k \cos \frac{k\pi}{2m+1}.$$

Milliste positiivsete täisarvude  $m$  korral on  $f(m)$  ratsionaalarv?

5. Leia kõik sellised naturaalarvud  $n$ , mille korral arvu VÜK  $(1, 2, \dots, n)$  kõigi positiivsete jagajate arv on  $2^k$ , kus  $k$  on mingi mittenegatiivne täisarv.

6. Nimetame *futboloidiks* kumerat hulktahukat, millel on järgmised omadused.

(1) Iga tahk on kas korrapärane viisnurk või korrapärane kuusnurk.

(2) Iga viisnurkse tahu kõik naabertahud on kuusnurksed (tahu *naabertahuks* nimetame tahku, millel on temaga ühine serv).

Leia futboloidi viisnurksete ja kuusnurksete tahkude võimalikud arvud.