Отборный конкурс в команду Эстонии на ММО'2003

Тарту, 3–4 мая 2003 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

Первый день

1. Кот Матроскин и пес Шарик нашли в лесу клад с монетами достоинством $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2003}$ (монет каждого достоинства неоганиченно много). Матроскин составляет все возможные комплекты монет, состоящие из нечетного числа монет попарно различного достоинства, и берет себе из каждого такого комплекта самую дорогую монету. Шарик составляет все возможные комплекты монет, состоящие из четного числа монет попарно различного достоинства, и берет себе из каждого такого комплекта самую дорогую монету. Кто из них получит больше денег и на сколько больше?

2. Пусть n положительное целое число. Доказать, что если число $\underbrace{99\ldots9}_{n}$ делится на n, то число $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ также делится на n.

3. Пусть $\mathbb{N}$ множество всех неотрицательных целых чисел и обозначим $n' = n + 1$ для любого неотрицательного целого числа n. Функция $A : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ определена следующими соотношениями:

   (i) $A(0, m, n) = m'$ для любых m, n из множества $\mathbb{N}$;

   (ii) $A(k', 0, n) = \begin{cases} n, & \text{если } k = 0, \\ 0, & \text{если } k = 1, \\ 1, & \text{если } k > 1 \end{cases}$ для любых k, n из $\mathbb{N}$;

   (iii) $A(k', m', n) = A(k, A(k', m, n), n)$ для любых k, m, n из $\mathbb{N}$.

   Найти $A(5, 3, 2)$.

Отборный конкурс в команду Эстонии на ММО'2003

Тарту, 3–4 мая 2003 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

Второй день

4. Колода состоит из 2^n карт. Перемешаем колоду многократно следующим образом: если перед очередным перемешиванием карты в колоде находятся в некотором порядке

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, \ldots,\, a_{2^n-1},\, a_{2^n}\ ,$$

то после перемешивания карты в колоде находятся в порядке

$$a_{2^{n-1}+1},\, a_1,\, a_{2^{n-1}+2},\, a_2,\, \ldots,\, a_{2^n},\, a_{2^{n-1}}\ .$$

Найти наименьшее число перемешиваний, после чего карты в колоде будут снова находиться в первоначальном порядке.

5. Пусть a, b, c положительные действительные числа, причем $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc}=1$. Доказать, что

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\ .$$

В каком случае здесь выполняется равенство?

6. В остроугольном треугольнике ABC точка O является центром описанной окружности, а H точкой пересечения высот. Найти отношение длин отрезков CH и BO, если известно, что основание проведенной из вершины A высоты находится на серединном перпендикуляре стороны AC.