IMO'2003 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 3.–4. mail 2003. a.

Ülesannete lahendused

Esimene päev

1. *Vastus:* Mõhk saab ühe kõige odavama mündi rohkem (ehk a_1 võrra rohkem raha).

   Lahendus 1. Seame igale Mõhu (s.t. paarituarvulise müntide arvuga) komplektile vastavusse ühe paarisarvulise müntide arvuga komplekti järgmise reegli järgi: kui Mõhu komplekt sisaldab väärtusega a_1 (odavaimat) münti, siis jätame selle välja, ning kui Mõhu komplekt ei sisalda odavaimat münti, siis lisame selle juurde. Paneme tähele, et nii saame parajasti kõikvõimalikud paarisarvulise müntide arvuga, s.t. Tölpa komplektid ning lisaks veel ühe tühja komplekti; see tekkis Mõhu komplektist, mis sisaldas vaid üht münti väärtusega a_1. Et odavaima mündi lisamine või ärajätmine ei mõjuta komplekti kalleima mündi valikut (v.a. juht, kus ainsa mündi ärajätmisel saime tühja komplekti), siis sisaldab Mõhu valitud kalleimate müntide hulk samad mündid nagu Tölpa valitud kalleimate müntide hulk ning lisaks veel ühe odavaima mündi.

   Lahendus 2. Vaatleme üldisemat juhtu, kus rahapajas on n erineva väärtusega münte, ning tõestame induktsiooniga n järgi, et Mõhk saab samad mündid nagu Tölpa ja lisaks veel ühe väärtusega a_1 mündi.

   Kui $n = 1$, s.t. rahapajas on kõik mündid ühesugused, siis saab Mõhk koostada üheainsa komplekti, mis koosneb ühest mündist, ja Tölpa ei saa koostada ühtegi komplekti. Seega Mõhk on saanud ühe väärtusega a_1 mündi rohkem kui Tölpa.

   Kehtigu nüüd väide n korral ning olgu rahapajas $n + 1$ erineva väärtusega münte. Nimetame kõige kallimat (väärtusega a_{n+1}) münti *eriliseks.* Induktsiooni eeldusest saame, et kui Mõhk ja Tölpa koostaksid ainult selliseid müntide komplekte, mis ei sisalda erilist münti, siis saaks Mõhk samad mündid nagu Tölpa ja lisaks veel ühe väärtusega a_1 mündi. Seega piisab veenduda, et neist komplektidest, mis sisaldavad erilist münti, saavad Mõhk ja Tölpa täpselt ühesugused mündid. Kuna igas sellises komplektis on aga kalleim just eriline münt, siis piisab veenduda, et Mõhk ja Tölpa koostavad ühepalju erilist münti sisaldavaid komplekte. Mõhu poolt koostatud komplekte on niisama palju kui kombinatsioone n elemendist paarisarvu kaupa, Tölpa poolt koostatud komplekte on niisama palju kui kombinatsioone n elemendist paaritu arvu kaupa. Kuna $n \geqslant 1$, siis tuntud teoreemi põhjal on need arvud tõepoolest võrdsed.

2. Tingimus, et n on arvu $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ jagaja, on samaväärne sellega, et $9n$ on arvu $\underbrace{99\ldots9}_{n}$ jagaja. Tõestame üldisema väite mistahes alusega positsioonilise arvusüsteemi jaoks. Nimelt näitame induktsiooniga n järgi, et mistahes positiivsete täisarvude n ja b korral sellest, et b^n-1 jagub arvuga n, järeldub, et b^n-1 jagub arvuga $(b-1)n$. Võttes siin $b=10$, saame ülesande väite.

   Kui $n=1$, siis väide ilmselt kehtib, sest $b^n-1=(b-1)(b^{n-1}+\ldots+b+1)$. Eeldame nüüd, et kõigi n-st väiksemate arvude jaoks väide kehtib mistahes b korral. Võtame suvalise positiivse täisarvu b ja eeldame, et b^n-1 jagub arvuga n. Vaatleme kahte võimalikku juhtu.

   a) Kui n ja $b-1$ on ühistegurita, siis sellest, et b^n-1 jagub arvudega n ja $b-1$, järeldub, et b^n-1 jagub arvuga $(b-1)n$.

   b) Kui n ja $b-1$ ei ole ühistegurita, siis leidub algarv p, mis on n ja $b-1$ ühine algtegur. Olgu $n=mp$, siis $b^n-1=b^{mp}-1=(b^p)^m-1$. Et $m<n$, siis m jaoks kehtib induktsiooni eeldus — kuna $(b^p)^m-1=b^n-1$ jagub arvuga $n=mp$ ja seega jagub arvuga m, siis $(b^p)^m-1=b^n-1$ jagub ka arvuga $(b^p-1)m$. Et $b-1$ jagub arvuga p, siis $b\equiv 1 \pmod p$ ning $1+b+\ldots+b^{p-1} \equiv \underbrace{1+1+\ldots+1}_{p} \equiv 0 \pmod p$. Järelikult arv $(b^p-1)m=(b-1)m\cdot(1+b+\ldots+b^{p-1})$ jagub arvuga $(b-1)mp=(b-1)n$ ning seega ka b^n-1 jagub arvuga $(b-1)n$, mida oligi tarvis tõestada.

3. *Vastus:* 65536.

   Lahendus. Näitame kõigepealt induktsiooniga k järgi, et mistahes naturaalarvude $k>1$ ja n korral $A(k,1,n)=n$. Tõepoolest, kui $k=2$, siis

$$\begin{aligned} A(2,1,n) &= A(1',0',n) = A(1,A(1',0,n),n) = \\ &= A(1,0,n) = A(0',0,n) = n\ . \end{aligned}$$

   Eeldame nüüd, et võrdus $A(k,1,n)=n$ kehtib mingi $k>1$ korral. Siis

$$A(k',1,n) = A(k',0',n) = A(k,A(k',0,n),n) = A(k,1,n) = n\ ,$$

   s.t. võrdus kehtib ka $k'=k+1$ korral.

Edasi näitame induktsiooniga m järgi, et mistahes naturaalarvude m ja n korral $A(1,m,n) = m+n$, $A(2,m,n) = mn$ ja $A(3,m,n) = n^m$. Tõepoolest, kui $m = 0$, siis

$$\begin{aligned} A(1,0,n) &= A(0',0,n) = n = 0 + n = m + n \ , \\ A(2,0,n) &= A(1',0,n) = 0 = 0n = mn \ , \\ A(3,0,n) &= A(2',0,n) = 1 = n^0 = n^m \ . \end{aligned}$$

Kehtigu nüüd võrdus $A(1,m,n) = m + n$ mingi m korral. Siis

$$\begin{aligned} A(1,m',n) &= A(0',m',n) = A(0,A(1,m,n),n) = A(0,m+n,n) = \\ &= (m+n)' = m' + n \ , \end{aligned}$$

s.t. võrdus $A(1,m,n) = m + n$ kehtib mistahes m ja n korral. Kehtigu nüüd mingi m korral võrdus $A(2,m,n) = mn$. Siis

$$\begin{aligned} A(2,m',n) &= A(1',m',n) = A(1,A(2,m,n),n) = A(1,mn,n) = \\ &= mn + n = m'n \ , \end{aligned}$$

s.t. võrdus $A(2,m,n) = mn$ kehtib samuti mistahes m ja n korral. Kehtigu lõpuks mingi m korral võrdus $A(3,m,n) = n^m$. Siis

$$\begin{aligned} A(3,m',n) &= A(2',m',n) = A(2,A(3,m,n),n) = A(2,n^m,n) = \\ &= n^m n = n^{m'} \ , \end{aligned}$$

s.t. ka võrdus $A(3,m,n) = n^m$ kehtib mistahes m ja n korral.

Edasi tõestame induktsiooniga k järgi, et mistahes naturaalarvu $k > 0$ korral $A(k,2,2) = 4$. Tõepoolest: $k = 1$ korral $A(1,2,2) = 2 + 2 = 4$. Kehtigu nüüd $A(k,2,2) = 4$ mingi $k > 0$ korral. Siis $k' > 1$ ja lahenduse alguses tõestatud väidet kasutades saame

$$A(k',2,2) = A(k',1',2) = A(k,A(k',1,2),2) = A(k,2,2) = 4 \ .$$

Paneme veel tähele, et mistahes naturaalarvu k korral

$$A(k',3,2) = A(k',2',2) = A(k,A(k',2,2),2) = A(k,4,2) \ .$$

Nüüd saame arvutada

$$\begin{aligned} A(5,3,2) &= A(4',3,2) = A(4,4,2) = A(3',3',2) = A(3,A(3',3,2),2) = \\ &= A(3,A(3,4,2),2) = 2^{2^4} = 65536 \ . \end{aligned}$$

Teine päev

4. *Vastus:* $2n$.

   Lahendus. Eeldame, et kaardid on nummerdatud naturaalarvudega $1, 2, \ldots, 2^n$. Paneme tähele, et kaardi x positsioon pakis pärast esimest segamist on $f(x) = 2x \bmod 2^n+1$. Järelikult pärast k segamist on kaardi x positsioon pakis $f^k(x) = 2^k x \bmod 2^n+1$. Meil on vaja leida vähim niisugune k, et iga x korral $f^k(x) = x$ ehk samaväärselt $2^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2^n+1)$. Olgu $k = 2n$. Kuna

   $$2^{2n} \equiv (2^n+1)^2 - 2(2^n+1) + 1 \equiv 1 \pmod{2^n+1},$$

   siis pärast $2n$ segamist on kaartide järjekord sama nagu alguses. Kui oletada, et mingi $m < 2n$ korral on kaartide järjekord m segamise järel sama nagu alguses, siis peab olema $m > n$, sest kaart 1 jõuab n segamise järel parajasti positsioonile 2^n. Lahutades nüüd kongruentsi $2^m \equiv 1 \pmod{2^n+1}$ kongruentsist $2^{2n} \equiv 1 \pmod{2^n+1}$, saame

   $$2^m(2^{2n-m} - 1) \equiv 0 \pmod{2^n+1}.$$

   See on aga vastuolu, sest 2^m on mooduliga 2^n+1 ühistegurita ning sulgudes asuv avaldis $2^{2n-m}-1$ on võrratuse $m > n$ tõttu väiksem kui moodul 2^n+1. Järelikult on $k = 2n$ vähim segamiste arv, mille järel kaartide algne järjestus taastub.

5. *Vastus:* võrdus kehtib parajasti siis, kui $a = b = c = \sqrt{3}$.

   Kirjutame antud võrduse kujul $abc = a + b + c$ ning teeme asenduse $a = \tan\alpha$, $b = \tan\beta$, $c = \tan\gamma$ — et $a, b, c > 0$, siis võime siinjuures eeldada, et $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$. Rakendades korduvalt samasust $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ saame, et $\tan(\alpha+\beta+\gamma) = 0$ ehk $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. Kasutades nüüd samasust $\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \sin^2 x$ ning arvestades, et teravnurkade α, β ja γ siinused ja tangensid on kõik positiivsed, saame tõestatava võrratuse esitada kujul

   $$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

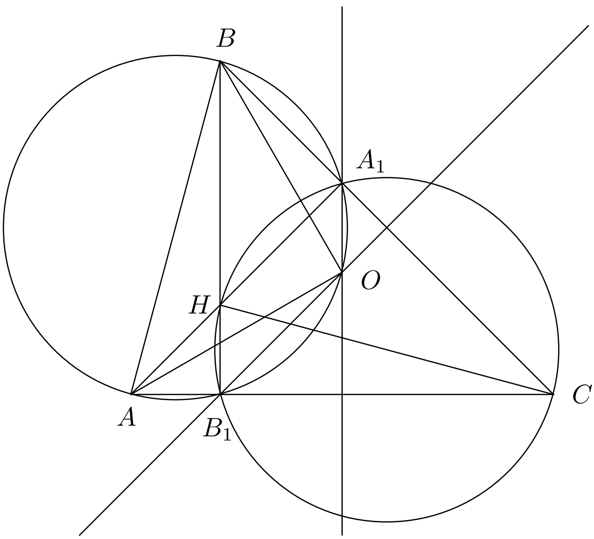
   Kuna $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ning siinusfunktsioon on lõigul $[0, \pi]$ nõgus, saame kasutada Jenseni võrratust. Niisiis

$$\frac{1}{3}\sin\alpha + \frac{1}{3}\sin\beta + \frac{1}{3}\sin\gamma \leqslant \sin\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

millest tulenebki nõutud võrratus. Siit on ka näha, et võrdus kehtib parajasti siis, kui $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{3}$, ehk $a = b = c = \sqrt{3}$.

6. *Vastus:* $\sqrt{2}$.

Lahendus. Olgu tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt A_1. Tõestame kõigepealt, et tipust B tõmmatud kõrguse aluspunkt B_1 asub külje BC keskristsirgel. Kolmnurk AA_1C on täisnurkne ja võrdhaarne, mistõttu $\angle ACB = \angle ACA_1 = 45^\circ$. Samas $\angle ACB = \angle B_1CB$ ning $\angle BB_1C = 90^\circ$. Järelikult on ka kolmnurk BB_1C täisnurkne ja võrdhaarne ning tema hüpotenuusi BC keskristsirge läbib tippu B_1. Kuna $\angle AA_1B = \angle BB_1A = 90^\circ$, siis asuvad punktid A, B, A_1 ja B_1 ühel ringjoonel diameetriga AB (vt. joonist 1). Kuna $\angle ACA_1 = 45^\circ$, siis $\angle AOB = 90^\circ$ ning punkt O asub punktidega A, B, A_1, B_1 samal ringjoonel. Et lisaks $|OA| = |OB|$, siis $|AB| : |BO| = \sqrt{2}$.



Joonis 1

Jääb üle näidata, et $|AB| = |CH|$. Selleks piisab tõestada, et CH on sama suure ringjoone diameetriks kui AB. Kuna $HB_1 \parallel A_1O$ ja $HA_1 \parallel B_1O$, siis on nelinurk HA_1OB_1 rööpkülik ning kolmnurkade A_1OB_1 ja B_1HA_1 ümberringjooned on ühesuurused. Kuna $\angle HA_1C = \angle HB_1C = 90^\circ$, siis paikneb ka punkt C punktidega B_1, H ja A_1 samal ringjoonel, kusjuures CH on selle ringjoone diameeter. Seega tõepoolest $|AB| = |CH|$ ning $|CH| : |BO| = |AB| : |BO| = \sqrt{2}$.