IMO'2003 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 3.–4. mail 2003. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

Esimene päev

1. Mõhk ja Tölpa leidsid metsast rahapaja, kus on mündid väärtustega $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2003}$ (iga väärtusega münte on piiramatul hulgal). Mõhk koostab kõikvõimalikud müntide komplektid, mis koosnevad paaritust arvust paarikaupa erineva väärtusega müntidest, ja võtab igast sellisest komplektist kõige kallima mündi endale. Tölpa koostab kõikvõimalikud müntide komplektid, mis koosnevad paarisarvust paarikaupa erineva väärtusega müntidest, ja võtab igast sellisest komplektist kõige kallima mündi endale. Kumb neist saab rohkem raha ja kui palju rohkem?

2. Olgu n positiivne täisarv. Tõesta, et kui arv $\underbrace{99\ldots9}_{n}$ jagub arvuga n, siis ka arv $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ jagub arvuga n.

3. Olgu $\mathbb{N}$ kõigi mittenegatiivsete täisarvude hulk ning tähistame mistahes mittenegatiivse täisarvu n korral $n' = n + 1$. Funktsioon $A : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ on defineeritud järgmiste seostega:

   (i) $A(0, m, n) = m'$ mistahes m, n korral hulgast $\mathbb{N}$;

   (ii) $A(k', 0, n) = \begin{cases} n, & \text{kui } k = 0, \\ 0, & \text{kui } k = 1, \\ 1, & \text{kui } k > 1 \end{cases}$ mistahes k, n korral hulgast $\mathbb{N}$;

   (iii) $A(k', m', n) = A(k, A(k', m, n), n)$ mistahes k, m, n korral hulgast $\mathbb{N}$.

   Leia $A(5, 3, 2)$.

IMO'2003 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 3.–4. mail 2003. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

Teine päev

4. Kaardipakis on 2^n kaarti. Segame kaardipakki korduvalt järgmisel viisil: kui enne järjekordset segamist on kaardid pakis mingis järjekorras

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, \ldots,\, a_{2^n-1},\, a_{2^n}\ ,$$

siis pärast segamist on kaardid pakis järjekorras

$$a_{2^{n-1}+1},\, a_1,\, a_{2^{n-1}+2},\, a_2,\, \ldots,\, a_{2^n},\, a_{2^{n-1}}\ .$$

Leia vähim segamiste arv, mille järel on kaardid pakis jälle esialgses järjekorras.

5. Olgu a, b, c positiivsed reaalarvud, kusjuures $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = 1$. Tõesta, et

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}\ .$$

Millisel juhul kehtib siin võrdus?

6. Teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt on O ning kõrguste lõikepunkt H. Leia lõikude CH ja BO pikkuste suhe, kui on teada, et tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt asub külje AC keskristsirgel.