Отборный конкурс в команду Эстонии на ММО'2002

Тарту, 4–5 мая 2002 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

Первый день

1. Княгиня хочет поместить на свой браслет r рубинов и s изумрудов в таком порядке, чтобы на браслете нашлись два драгоценных камня, начав с которых перечисление драгоценных камней в одном и том же направлении, получились бы одинаковые последовательности. Доказать, что желание княгини можно исполнить тогда и только тогда, когда числа r и s не являются взаимно простыми.

2. Пусть A, B_1 и B_2 соответственно точки пересечения биссектрис вершины и углов при основании равнобедренного треугольника с его противоположными сторонами. Доказать, что $\cos \angle B_1AB_2 < \dfrac{3}{5}$.

3. В стране 10 городов, которые соединены *односторонними* беспосадочными самолетными линиями так, что из каждого города можно долететь (с пересадками или без) до любого из остальных городов. Пусть n наименьшее число полетов, за которое можно, начав в некотором городе, посетить все остальные города и вернуться обратно в начальную точку путешествия. Найти наибольшее возможное значение n.

Отборный конкурс в команду Эстонии на ММО'2002

Тарту, 4–5 мая 2002 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

Второй день

4. Пусть $ABCD$ вписанный в окружность четырехугольник, в котором $\angle ACB = 2\angle CAD$ и $\angle ACD = 2\angle BAC$. Доказать, что $|CA| = |CB| + |CD|$.

5. Пусть $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие действительные числа, что

   $$\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n \geqslant n \cdot \sin \alpha\ .$$

   Доказать, что

   $$\sin(x_1 - \alpha) + \sin(x_2 - \alpha) + \ldots + \sin(x_n - \alpha) \geqslant 0\ .$$

6. Пусть в каждой точке действительной прямой с целочисленной *неположительной* координатой расположено по одной фишке, и пусть n фиксированное положительное число. На каждом шагу выбираем на прямой некоторые n последовательных точек с целочисленными координатами, и одну из фишек, расположенных в этих точках, убираем, а оставшиеся произвольно переставляем в пределах выбранных точек (в каждую точку можно поставить не более одной фишки).

   Найдется ли такое значение n, при котором для любого заданного числа $N > 0$ можно за конечное число описанных шагов расположить фишку в точке, координата которой больше N?