IMO'2002 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 4.–5. mail 2002. a.

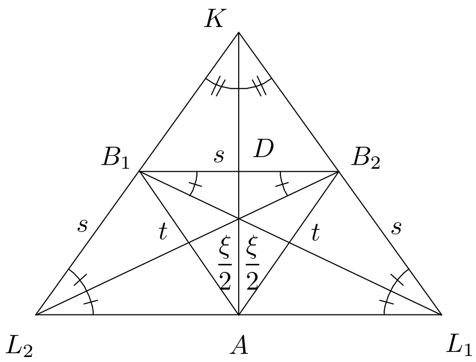
Ülesannete lahendused

Esimene päev

1. Näitame kõigepealt, et kui $\text{SÜT}\,(r,s) = d > 1$, siis on vürstinna soovi täitmine võimalik. Olgu $r' = \dfrac{r}{d}$ ja $s' = \dfrac{s}{d}$. Paigutame käevõrule järjest r' rubiini ja nende järele s' smaragdi, seejärel jälle r' rubiini ja s' smaragdi, jne. (nii d korda). Niiviisi on kõik kalliskivid käevõrule paigutatud ning mistahes kaks teineteisest kaugusel $r'+s'$ paiknevat kalliskivi on vürstinna soovitud omadusega.

   Oletame nüüd, et vürstinna soovi täitmine on võimalik, ja näitame, et siis $\text{SÜT}\,(r,s) > 1$. Olgu $n = r + s$ kalliskivide koguarv. Nummerdame positsioonid käevõrul arvudega $0, \ldots, n{-}1$, kusjuures mistahes täisarvu i korral mõistame positsioonina i positsiooni $i\,(\text{mod } n)$. Kalliskivide mistahes paigutuse P korral tähistagu $P(i)$ positsioonile i paigutatud kalliskivi liiki (rubiin või smaragd). Kuna $\text{SÜT}\,(r,s) = \text{SÜT}\,(r,n)$, siis piisab näidata, et r ja n ei ole ühistegurita.

   Olgu P mingi kalliskivide paigutus, mis rahuldab vürstinna soovi. Olgu nõutud kaks kalliskivi positsioonidel a ja $a{+}i$, kus $0 < i < n$, siis iga $j \geqslant 0$ korral $P(a{+}j) = P(a{+}i{+}j)$. Kuna iga täisarv on *modulo* n kongruentne mingi arvuga $a{+}j$, siis suvalise positsiooni b korral $P(b) = P(b{+}i)$, millest elementaarse induktsiooniga järeldub, et $P(b) = P(b{+}i) = P(b{+}2i) = \ldots$. Olgu k vähim positiivne täisarv, mille korral ki jagub arvuga n. Siis positsioon $b + ki$ langeb kokku positsiooniga b mistahes b korral, kuid mistahes $0 \leqslant l_1 < l_2 < k$ korral positsioonid $b + l_1 i$ ja $b + l_2 i$ on erinevad, sest vastasel korral jaguks arv $(b + l_2 i) - (b + l_1 i) = (l_2 - l_1)i$ arvuga n, mis oleks vastuolus k valikuga. Olgu R nende positsioonide hulk, kus paiknevad rubiinid. Mistahes positsiooni b korral hulgast R on eelneva põhjal positsioonidel $b,\, b + i,\, \ldots,\, b + (k-1)i$ kokku k erinevat rubiini; tähistame nende rubiinide hulka $O(b)$ ja nimetame positsiooni b *orbiidiks*. Paneme tähele, et kui mingite positsioonide b_1, b_2 korral hulgast R positsioonil b_2 olev rubiin ei kuulu hulka $O(b_1)$, siis arv $b_1 + li - b_2$ ei jagu n-ga ühegi täisarvu l korral, millest tulenevalt on orbiidid $O(b_1)$ ja $O(b_2)$ lõikumatud, sest positsioonide $b_1 + l_1 i$ ja $b_2 + l_2 i$ võrdsusest järelduks, et arv $(b_1 + l_1 i) - (b_2 + l_2 i) = b_1 + (l_1 - l_2)i - b_2$ jaguks n-ga. Järelikult kõigi käevõrul olevate rubiinide hulk esitub mingi arvu orbiitide lõikumatu ühendina, kusjuures iga orbiit sisaldab täpselt k rubiini. Seega k on r jagaja. Kui nüüd oletada vastuväiteliselt, et r ja n on ühistegurita, siis oleksid ka k ja n ühistegurita. Kuna aga ki jagub n-ga, siis peaks i jaguma n-ga, mis on vastuolus i valikuga. Seega $\text{SÜT}\,(r,s) = \text{SÜT}\,(r,n) > 1$.



Joonis 1

2. *Lahendus 1.* Olgu vaadeldav võrdhaarne kolmnurk KL_1L_2 nurgapoolitajatega KA, L_1B_1 ja L_2B_2 (vt. joonist 1). Olgu α ja β vastavalt kolmnurga KL_1L_2 tipunurga ja alusnurkade suurused ning $\xi = \angle B_1AB_2$. Kuna KA on kolmnurga KL_1L_2 sümmeetriatelg, siis punktid B_1 ja B_2 on teineteise peegeldused sirgest KA, mistõttu $B_1B_2 \perp KA$ ehk $B_1B_2 \parallel L_1L_2$. Kolmnurk AB_1B_2 on võrdhaarne alusega B_1B_2 ja AK on selle tipunurga poolitaja. Et $\angle B_2B_1L_1 = \angle L_2L_1B_1 = \angle B_2L_1B_1$, siis kolmnurk $B_2L_1B_1$ on võrdhaarne alusega L_1B_1. Tähistame $s = |B_1B_2| = |B_2L_1|$ ja $t = |AB_1| = |AB_2|$.
   Siinusteoreem kolmnurgas AL_1B_2 annab

$$\frac{s}{t} = \frac{\sin\angle B_2AL_1}{\sin\beta} = \frac{\cos\dfrac{\xi}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}},$$

   millest $\left(\dfrac{s}{t}\right)^2 = \dfrac{1+\cos\xi}{1+\cos\alpha}$. Koosinusteoreem kolmnurgas AB_1B_2 annab

$$s^2 = t^2 + t^2 - 2t^2\cos\xi = 2t^2(1-\cos\xi),$$

millest $\left(\frac{s}{t}\right)^2 = 2(1-\cos\xi)$. Seega $\frac{1+\cos\xi}{1+\cos\alpha} = 2(1-\cos\xi)$. kust teisendades saame

$$\cos\xi = \frac{1+2\cos\alpha}{3+2\cos\alpha} = 1 - \frac{2}{3+2\cos\alpha} < 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses vaatleme võrdhaarset kolmnurka KL_1L_2 tipunurgaga α, näitame, et kolmnurgad AB_1B_2 ja $B_2L_1B_1$ on võrdhaarsed, ning tähistame $s = |B_1B_2| = |B_2L_1|$, $t = |AB_1| = |AB_2|$ ja $\xi = \angle B_1AB_2$. Olgu veel D lõikude KA ja B_1B_2 lõikepunkt (ehk lõigu B_1B_2 keskpunkt) ja $h = |AD|$. Siis

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{|KA|}{|KL_1|} = \frac{|DA|}{|B_2L_1|} = \frac{h}{s}$$

ning

$$\cot\frac{\xi}{2} = \frac{|DA|}{|DB_1|} = \frac{h}{s/2} = 2\cdot\frac{h}{s}\,,$$

millest $\cot\frac{\xi}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2} < 2$, sest $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$. Kuna kootangensfunktsioon on vahemikus $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rangelt kahanev, siis on see samaväärne võrratusega $\frac{\xi}{2} > \operatorname{arccot} 2$ ehk $\xi > 2\operatorname{arccot} 2$. Et $\cos(\operatorname{arccot} 2) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ja $\sin(\operatorname{arccot} 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, siis $\cos(2\operatorname{arccot} 2) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$. Kuna koosinusfunktsioon on vahemikus $(0,\pi)$ kahanev, siis $\cos\xi < \cos(2\operatorname{arccot} 2)$, s.t. $\cos\xi < \frac{3}{5}$.

3. *Vastus:* 30.

Lahendus 1. Tähistame linnad $L_1, \ldots, L_{10}$ ning tähistagu x_{ij} vähimat lendude arvu, millega saab linnast L_i lennata linna L_j. Olgu

$$m = \max_{i\neq j} x_{ij}\;;$$

üldisust kitsendamata võime eeldada, et $i = 1$, $j = m+1$ ning lühim tee linnast L_1 linna L_{m+1} on

$$L_1,\, L_2,\, \ldots,\, L_m,\, L_{m+1}\,.$$

Jätkame seda teed, lennates linnast L_{m+1} linna L_{m+2}, sealt edasi linna L_{m+3} jne. ning pöördudes lõpuks linnast L_n tagasi linna L_1:

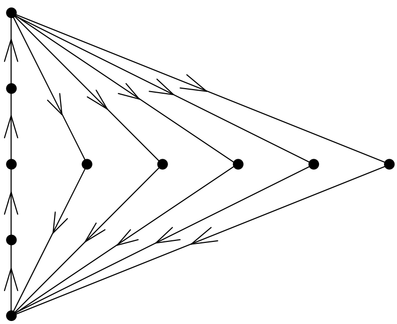
$$L_1,\, L_2,\, \ldots,\, L_m,\, L_{m+1} \to L_{m+2} \to \ldots \to L_n \to L_1\ .$$

Siin iga noolega tähistatud teeosa sisaldab ülimalt m lendu ning neid teeosi on kokku $10-(m+1)+1=10-m$, mistõttu kogu teekond sisaldab ülimalt

$$m + m\cdot(10-m) = m\cdot(11-m) \leqslant \Big(\frac{m+11-m}{2}\Big)^2 = \frac{121}{4}$$

lendu, s.t. mitte rohkem kui 30 lendu.

Näide lennuliinide võrgust, mille korral vähemast kui 30 lennust ilmselt ei piisa, on näidatud joonisel 2.



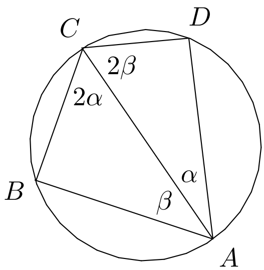
Joonis 2

Lahendus 2. Vaatleme mingit lühimat (s.t. täpselt n lennust koosnevat) teed, mis mingist linnast lähtudes läbib kõiki ülejäänud linnu ning jõuab lõpuks tagasi lähtepunkti. Olgu A_1 nende linnade hulk, mida vaadeldav tee läbib ainult üks kord, ning A_2 nende linnade hulk, mida see tee läbib rohkem kui üks kord. Olgu L suvaline linn hulgast A_2 ning sisaldagu vaadeldav tee lõiku $T=(L,\, L_1,\, \ldots,\, L_k,\, L)$ — näitame, et linnad $L_1,\, \ldots,\, L_k$ ei saa kõik kuuluda hulka A_2. Tõepoolest, kui igaüks neist linnadest esineb vaadeldaval teel ka väljaspool lõiku T, siis võime lõigu T sellest teest välja jätta (asendada linna L ühekordse läbimisega), mis on vastuolus eeldusega tee pikkuse minimaalsuse kohta. Kui aga mõni neist linnadest esineb rohkem kui üks kord lõigul T, s.t. $L_i = L_j$ mingite indeksite $i<j$ korral, siis

vaatleme lõigu T asemel lõiku $T' = (L_i, \ldots, L_j)$ — lõpliku arvu selliste sammude järel jõuame olukorrani, kus iga linn mingil lõigul $(L_p, \ldots, L_q)$, kus $L_p = L_q$, esineb vaadeldaval teel ka väljaspool seda lõiku, mis, nagu eespool mainitud, on vastuolus minimaalsuse eeldusega.

Olgu nüüd $|A_1| = s$, siis $|A_2| = 10 - s$ ning vastavalt eespool tõestatule saab iga linn hulgast A_2 esineda vaadeldaval teel ülimalt s korda, mistõttu $n \leqslant s + s(10 - s) = s(11 - s)$. Samuti nagu eelmises lahenduses järeldame sellest, et $n \leqslant \left\lfloor \frac{121}{4} \right\rfloor = 30$, ning veendume, et 30 lendu nõudev liinivõrk on võimalik.

Teine päev



Joonis 3

4. Olgu $\angle CAD = \alpha$ ja $\angle BAC = \beta$, siis $\angle ACB = 2\alpha$ ja $\angle ACD = 2\beta$ (vt. joonist 3). Et $ABCD$ on kõõlnelinurk, siis

$$3\alpha + 3\beta = \angle BCD + \angle BAD = 180^\circ ,$$

kust $\alpha + \beta = 60^\circ$. Siinusteoreemist kolmnurkades ABC ja ACD saame, et

$$\begin{aligned} |CB| &= 2R \cdot \sin\beta , \\ |CD| &= 2R \cdot \sin\alpha , \\ |CA| &= 2R \cdot \sin(180^\circ - \alpha - 2\beta) = 2R \cdot \sin(\alpha + 2\beta) , \end{aligned}$$

kus R on nelinurga $ABCD$ ümberringjoone raadius, mistõttu piisab näidata, et

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha + 2\beta) ,$$

kui $\alpha+\beta=60^\circ$. Tõepoolest:

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\Big(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\Big) = \\ &= \cos(30^\circ-\beta)=\sin(60^\circ+\beta)=\sin(\alpha+2\beta)\ .\end{aligned}$$

5. *Lahendus 1.* Oletame vastuväiteliselt, et

$$\sin(x_1-\alpha)+\sin(x_2-\alpha)+\ldots+\sin(x_n-\alpha)<0\ ,$$

ehk

$$\cos\alpha\cdot(\sin x_1+\ldots+\sin x_n)<\sin\alpha\cdot(\cos x_1+\ldots+\cos x_n)\ ,$$

kust

$$\cos x_1+\ldots+\cos x_n>\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot(\sin x_1+\ldots+\sin x_n)\geqslant n\cdot\cos\alpha$$

ning seega

$$(\sin x_1+\ldots+\sin x_n)^2+(\cos x_1+\ldots+\cos x_n)^2>n^2\ .$$

Teisalt aga

$$\begin{aligned}&(\sin x_1+\ldots+\sin x_n)^2+(\cos x_1+\ldots+\cos x_n)^2 = \\ &\quad=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sin x_i\sin x_j+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\cos x_i\cos x_j = \\ &\quad=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\cos(x_i-x_j)\leqslant n^2\ .\end{aligned}$$

Saadud vastuolu tõestab ülesandes esitatud väite.

Märkus. Võrratuse

$$(\sin x_1+\ldots+\sin x_n)^2+(\cos x_1+\ldots+\cos x_n)^2\leqslant n^2$$

tõestamiseks võime ka näidata, et

$$\begin{aligned}&(\sin x_1+\ldots+\sin x_n)^2+(\cos x_1+\ldots+\cos x_n)^2\leqslant \\ &\quad\leqslant n(\sin^2 x_1+\ldots+\sin^2 x_n)+n(\cos^2 x_1+\ldots+\cos^2 x_n)\ ,\end{aligned}$$

mis järeldub aritmeetilise ja ruutkeskmise vahelisest võrratusest või Jenseni võrratusest kumera funktsiooni $f(t) = t^2$ jaoks.

Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses oletame vastuväiteliselt, et

$$\sin(x_1 - \alpha) + \sin(x_2 - \alpha) + \ldots + \sin(x_n - \alpha) < 0 ,$$

ning näitame, et siis

$$\cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n > n \cdot \cos \alpha .$$

Võtame nüüd koordinaattasandil ühikringjoonel $x^2 + y^2 = 1$ punktid $X_1, \ldots, X_n$ nii, et $\angle(Ox, OX_i) = x_i$, iga $i = 1, \ldots, n$ korral, ning punkti A nii, et $\angle(Ox, OA) = \alpha$. Siis

$$\begin{aligned} \sin x_1 + \ldots + \sin x_n &= \mathrm{proj}_y \overrightarrow{OX_1} + \ldots + \mathrm{proj}_y \overrightarrow{OX_n} = \\ &= \mathrm{proj}_y \left(\overrightarrow{OX_1} + \ldots + \overrightarrow{OX_n} \right) \end{aligned}$$

ja

$$n \sin \alpha = n \cdot \mathrm{proj}_y \overrightarrow{OA} = \mathrm{proj}_y (n\,\overrightarrow{OA}) .$$

Analoogiliselt saame võrdused

$$\cos x_1 + \ldots + \cos x_n = \mathrm{proj}_x \left(\overrightarrow{OX_1} + \ldots + \overrightarrow{OX_n} \right)$$

ja

$$n \cos \alpha = \mathrm{proj}_x (n\,\overrightarrow{OA}) .$$

Samas, kuna $|\overrightarrow{OX_1}| = \ldots = |\overrightarrow{OX_n}| = |\overrightarrow{OA}| = 1$, siis

$$|\overrightarrow{OX_1} + \ldots + \overrightarrow{OX_n}| \leqslant |\overrightarrow{OX_1}| + \ldots + |\overrightarrow{OX_n}| = n$$

ja

$$|n\,\overrightarrow{OA}| = n \cdot |\overrightarrow{OA}| = n .$$

Niisiis näeme, et vektor $\overrightarrow{OX_1} + \ldots + \overrightarrow{OX_n}$ ei ole pikem kui vektor $n\,\overrightarrow{OA}$, kuid tema projektsioon y-teljele on vektori $n\,\overrightarrow{OA}$ omast mitte lühem, projektsioon x-teljele aga on rangelt pikem — vastuolu.

6. *Vastus:* ei leidu.

Ilmselt ei ole $n = 1$ ja $n = 2$ korral võimalik paigutada nuppu ühtegi positiivse koordinaadiga punkti. Olgu nüüd $n \geqslant 3$ ning vaatleme lõpmatut summat

$$S = a^{x_1} + a^{x_2} + a^{x_3} + \dots ,$$

kus x_1, x_2, x_3, ... on nende punktide koordinaadid, kus mingil vaadeldaval ajahetkel paiknevad nupud, ning a on sobivalt valitud positiivne arv. Näitame, et on võimalik valida arv a olenevalt arvust n nii, et algseisule vastav summa

$$S_0 = a^0 + a^{-1} + a^{-2} + a^{-3} + \dots$$

koondub (selleks on tarvilik ja piisav, et $a > 1$) ning igal ülesandes kirjeldatud sammul võib summa S väärtus ainult väheneda. Seega kehtib alati võrratus $S \leqslant S_0$ ning nupu paigutamine kuitahes suure positiivse koordinaadiga N punkti ei ole võimalik, sest piisavalt suure N korral oleks $a^N > S_0$.

Selleks vaatleme $n = 2k - 1$ korral võrrandit

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1} = x^k + \dots + x^{2k-2} \tag{1}$$

ja $n = 2k$ korral võrrandit

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1} = x^{k+1} + \dots + x^{2k-1} . \tag{2}$$

Ilmselt on $0 \leqslant x \leqslant 1$ korral selle võrrandi vasak pool paremast poolest suurem, teisalt aga saab piisavalt suure positiivse x korral parem pool suuremaks vasakust poolest. Järelikult leidub vaadeldaval võrrandil lahend $a > 1$. Veendumaks, et niiviisi leitud a on eespool kirjeldatud omadusega, piisab näidata, et mistahes täisarvu m ja võrratusi $1 \leqslant t \leqslant \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ rahuldava täisarvu t korral hulga

$$A = \{a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+n-1}\}$$

mistahes $t - 1$ elemendi summa ei ole suurem sellesama hulga mistahes t elemendi summast (siin $[m, m + n - 1]$ on vaadeldaval sammul valitud reaalsirge lõik ning t on nende punktide arv, kus enne seda sammu oli nupp ja selle sammu järel ei ole — siis nende punktide arv, kus enne seda sammu nuppu ei olnud ja selle sammu järel on nupp, on $t-1$). Paneme veel tähele, et tegelikult piisab vaadelda juhtu, kus $m=0$, ning tõestada, et $t-1$ suurima elemendi summa hulgas A ei ole suurem sellesama hulga t vähima elemendi summast, s.t.

$$1+a+a^2+\ldots+a^{t-1} \geqslant a^{n-t+1}+\ldots+a^{n-1} \,,$$

kus $1 \leqslant t \leqslant \left[\dfrac{n+1}{2}\right] = k$. See aga järeldub otseselt sellest, et $x=a$ korral kehtib võrdus (1) või (2) ning kuna $a>1$, siis selle võrduse kummastki poolest ühe ja sama arvu liidetavate kustutamisel saab vasak pool suuremaks paremast poolest.