# IMO'2002 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 4.–5. mail 2002. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

**Esimene päev**

1. Vürstinna soovib lasta oma käevõrule paigutada $r$ rubiini ja $s$ smaragdi sellises järjekorras, et võrul leiduks kaks kalliskivi, millest alates samas suunas võrul olevaid kalliskive loetledes saaksime sama loetelu. Tõesta, et vürstinna soovi on võimalik täita parajasti siis, kui arvud $r$ ja $s$ ei ole ühistegurita.

2. Olgu $A$, $B_1$ ja $B_2$ vastavalt võrdhaarse kolmnurga tipunurga ja alusnurkade poolitajate lõikepunktid kolmnurga vastaskülgedega. Tõesta, et $\cos \angle B_1AB_2 < \dfrac{3}{5}$.

3. Riigis on 10 linna, mis on ühendatud *ühesuunaliste* vahemaandumisteta lennuliinidega nii, et igast linnast on võimalik (ümberistumistega või ilma) lennata kõigisse ülejäänud linnadesse. Olgu $n$ vähim lendude arv, millega on võimalik mingist linnast lähtudes külastada kõiki ülejäänud linnu ja jõuda tagasi reisi lähtepunkti. Leia $n$ suurim võimalik väärtus.

# IMO'2002 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 4.–5. mail 2002. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

**Teine päev**

4. Olgu $ABCD$ kõõlnelinurk, kus $\angle ACB = 2\angle CAD$ ja $\angle ACD = 2\angle BAC$. Tõesta, et $|CA| = |CB| + |CD|$.

5. Olgu $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ning $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sellised reaalarvud, et

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n \geqslant n \cdot \sin \alpha .$$

   Tõesta, et

$$\sin(x_1 - \alpha) + \sin(x_2 - \alpha) + \ldots + \sin(x_n - \alpha) \geqslant 0 .$$

6. Paiknegu reaalsirge igas *mittepositiivse* täisarvulise koordinaadiga punktis üks nupp ning olgu $n$ fikseeritud positiivne täisarv. Igal sammul valime sirgel mingid $n$ järjestikust täisarvuliste koordinaatidega punkti ning nendes punktides olevatest nuppudest ühe võtame ära ja ülejäänud paigutame suvalisel viisil ümber valitud punktide piires (igasse punkti võime panna ülimalt ühe nupu).

   Kas leidub selline $n$ väärtus, mille korral mistahes etteantud arvu $N > 0$ jaoks saab lõpliku arvu kirjeldatud sammudega paigutada nupu punkti, mille koordinaat on suurem kui $N$?