Отборный конкурс в команду Эстонии на ММО'2001

Тарту, 14–15 апреля 2001 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

Первый день

1. Рассмотрим на координатной плоскости всевозможные прямоугольники, у которых:

   (i) вершины имеют целочисленные координаты;

   (ii) стороны параллельны координатным осям;

   (iii) площадь равна 2^k, где $k = 0, 1, 2 \ldots$.

   Можно ли покрасить двумя цветами все точки с целочисленными координатами так, чтобы ни у одного такого прямоугольника все вершины не находились бы в точках одного и того же цвета?

2. Расстояния от точки X, взятой во внутренней области правильного n-угольника с длинной стороны a, до прямых, определяемых сторонами n-угольника, равны $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Доказать, что

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \ldots + \frac{1}{h_n} > \frac{2\pi}{a} .$$

3. Пусть $\mathbb{R}$ обозначает множество всех действительных чисел и k — фиксированное действительное число. Найти все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые при любых действительных числах x и y удовлетворяют условию

$$f(x) + \bigl(f(y)\bigr)^2 = kf(x + y^2) .$$

Отборный конкурс в команду Эстонии на ММО'2001

Тарту, 14–15 апреля 2001 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

Второй день

4. Рассмотрим всевозможные произведения по 2, по 4, по 6, ..., по 2000 элементов множества $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2000}, \frac{1}{2001}\right\}$. Найти сумму всех таких произведений.

5. Найти показатель степени простого числа 37 в представлении числа $\underbrace{111\ldots\ldots11}_{3\cdot 37^{2000}\text{ цифр}}$ в виде произведения степеней простых чисел.

6. Пусть $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ соответственно вписанная и описання окружности треугольника ABC. Доказать, что для любой точки A' на окружности $\mathcal{C}_2$ найдутся такие точки B' и C', что $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ будут соответственно вписанной и описанной окружностями для треугольника $A'B'C'$.