IMO'2001 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 14.–15. aprillil 2001. a.

Ülesannete lahendused

Esimene päev

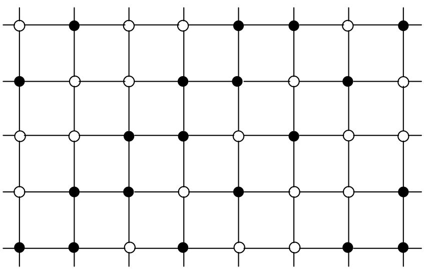
1. *Vastus:* jah.

   Lahendus 1. Värvime fikseeritud ordinaadi väärtusega punktid tsükliliselt 6-kaupa gruppidena:

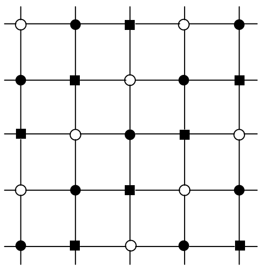
$$\dots\ \underbrace{\bullet\ \bullet\ \circ\ \bullet\ \circ\ \circ}\ \underbrace{\bullet\ \bullet\ \circ\ \bullet\ \circ\ \circ}\ \underbrace{\bullet\ \bullet\ \circ\ \bullet\ \circ\ \circ}\ \dots \tag{1}$$

   ning ordinaadi suurendamisel 1 võrra kordame sama värvimist nihutatuna ühe punkti võrra, nagu näidatud joonisel 1.

   Et mistahes vaadeldava ristküliku kummagi külje pikkus on arvu 2 aste, piisab kontrollida, et mistahes mittenegatiivsete täisarvude a, b ja mistahes täisarvu x korral jadas (1) punktid x, $x+2^a$, $x+2^b$ ja $x+2^a+2^b$ ei ole kõik ühte värvi (selles saame veenduda lihtsa juhtude läbivaatusega modulo 6).



Joonis 1



Joonis 2

   Lahendus 2. Värvime kõik täisarvuliste koordinaatidega punktid esialgu kolme värviga nii, et igal diagonaalil $y = x + k$ on kõik punktid ühte värvi ja k suurenedes vahelduvad värvid tsükliliselt (vt. joonist 2). Et

$2^m \equiv 1 \pmod 3$, kui m on paarisarv, ja $2^m \equiv 2 \pmod 3$, kui m on paaritu arv, siis on lihtne veenduda, et mistahes vaadeldava ristküliku tippudes esinevad kõik kolm värvi. Värvides nüüd mingit kaht värvi punktid ümber ühe värviga saamegi nõutava omadusega värvimise.

2. *Lahendus 1.* Arvutame vaadeldava korrapärase n-nurga pindala kahel viisil:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (h_1 + h_2 + \ldots + h_n)$$

ning

$$S = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2 \tan \dfrac{\pi}{n}} \ .$$

Seega

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = \frac{na}{2 \tan \dfrac{\pi}{n}} \ .$$

Arvestades, et

$$(h_1 + h_2 + \ldots + h_n) \cdot \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \ldots + \frac{1}{h_n} \right) \geqslant n^2$$

ning $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ korral $0 < x < \tan x$, saame

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \ldots + \frac{1}{h_n} \geqslant n^2 \cdot \frac{2 \tan \dfrac{\pi}{n}}{na} > n^2 \cdot \frac{2}{na} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{2\pi}{a} \ .$$

Lahendus 2. Olgu vaadeldava hulknurga pindala S ja siseringjoone raadius r. Siis

$$S = n \cdot \frac{ar}{2}$$

ja samal ajal

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (h_1 + h_2 + \ldots + h_n) \ .$$

Kasutades aritmeetilise ja harmoonilise keskmise vahelist võrratust, saame

$$\frac{n}{\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\ldots+\frac{1}{h_n}} \leqslant \frac{h_1+h_2+\ldots+h_n}{n} = \frac{2S}{na} = r\ .$$

Hulknurga ümbermõõdu ja tema siseringjoone ümbermõõdu võrdlemisel saame $na > 2\pi r$. Seega

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\ldots+\frac{1}{h_n} \geqslant \frac{n}{r} > \frac{2\pi}{a}\ .$$

3. *Vastus:* Kui $k=1$, siis $f(x)=x$ või $f(x)=0$; kui $k\neq 1$, siis $f(x)=k-1$ või $f(x)=0$.

Võttes lähtevõrrandis $y=0$, saame

$$(k-1)f(x)=f(0)^2. \tag{2}$$

Olgu kõigepealt $k\neq 1$, siis võttes võrduses (2) $x=0$ saame, et $f(0)=0$ või $f(0)=k-1$. Seega juhul $k\neq 1$ on võrrandi lahenditeks konstantsed funktsioonid $f(x)=0$ ja $f(x)=k-1$.

Olgu nüüd $k=1$, siis saame võrdusest (2), et $f(0)=0$. Võttes lähtevõrrandis $x=0$, saame $\big(f(y)\big)^2=f(y^2)$, millest $y=1$ korral leiame, et $f(1)=1$ või $f(1)=0$.

Et mistahes mittenegatiivse reaalarvu z korral saab leida reaalarvu y nii, et $y^2=z$, siis võrduse $\big(f(y)\big)^2=f(y^2)$ tõttu peab mistahes $z\geqslant 0$ korral olema $f(z)\geqslant 0$. Samuti, võttes lähtevõrrandis $x=-y^2$, saame $f(-y^2)=-\big(f(y)\big)^2$, mistõttu $z\leqslant 0$ korral peab olema $f(z)\leqslant 0$. Kuna

$$\big(f(y)\big)^2=f(y^2)=f((-y)^2)=\big(f(-y)\big)^2\ ,$$

siis arvestades eespool tõestatut peab olema $f(y)=-f(-y)$, s.t. funktsioon f on paaritu.

Olgu nüüd x suvaline reaalarv ja $z\geqslant 0$, siis tähistades $y=\sqrt{z}$ saame

$$f(x+z)=f(x+y^2)=f(x)+\big(f(y)\big)^2=f(x)+f(y^2)=f(x)+f(z)\ . \tag{3}$$

Seega funktsioon f on mittekahanev: kui $a \leqslant b$, siis $b - a \geqslant 0$ ning

$$f(b) = f(a + (b - a)) = f(a) + f(b - a) \geqslant f(a) .$$

Et f on paaritu funktsioon, kehtib võrdus (3) ka juhul, kui arvud x ja z on mõlemad negatiivsed. Induktsiooniga n järgi on nüüd lihtne näidata, et $f(nx) = nf(x)$ mistahes reaalarvu x ja täisarvu n korral. Tõepoolest, see kehtib $n = 0$ korral ja kui $f(nx) = nf(x)$, siis

$$f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx)+f(x) = nf(x)+f(x) = (n+1)f(x) .$$

Seega kehtib võrdus $f(nx) = nf(x)$ kõigi mittenegatiivsete täisarvude n korral. Et funktsioon f on paaritu, siis $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$, s.t. võrdus $f(nx) = nf(x)$ kehtib ka negatiivsete täisarvude n korral.

Eespool tõestasime, et $f(1) = 1$ või $f(1) = 0$. Kui $f(1) = 0$, siis võttes $x = 1$ võrduses $f(nx) = nf(x)$ saame, et iga täisarvu n korral $f(n) = 0$, ning funktsiooni f mittekahanevuse tõttu seega $f(x) = 0$ iga reaalarvu x korral. Eeldame nüüd, et $f(1) = 1$, ja näitame, et $f(x) = x$ iga x korral. Täisarvude korral tuleb see võrdusest $f(nx) = nf(x)$, võttes selles $x = 1$. Ratsionaalarvu $\frac{a}{b}$ jaoks saame

$$a = f(a) = f\Big(b \cdot \frac{a}{b}\Big) = b \cdot f\Big(\frac{a}{b}\Big),$$

millest $f\Big(\frac{a}{b}\Big) = \frac{a}{b}$. Seega võrdus kehtib kõigi ratsionaalarvude jaoks. Oletame nüüd vastuväiteliselt, et mingi reaalarvu x korral $f(x) \neq x$, siis $f(x) = x + \varepsilon$, kus $\varepsilon \neq 0$. Kui $\varepsilon > 0$, siis olgu ratsionaalarv r selline, et $x < r < x + \varepsilon$. Kui $\varepsilon < 0$, siis olgu ratsionaalarv r selline, et $x > r > x + \varepsilon$. Esimesel juhul saame $r < x + \varepsilon = f(x) \leqslant f(r) = r$, teisel juhul aga $r > x + \varepsilon = f(x) \geqslant f(r) = r$ — mõlemal juhul saime vastuolu.

Teine päev

4. *Vastus:* $499\frac{1001}{2001}$.

Lahendus 1. Avaldise

$$\Big(1 + \frac{1}{2}\Big) \cdot \Big(1 + \frac{1}{3}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(1 + \frac{1}{2001}\Big) - 1$$

väärtus on võrdne hulga A elementide kõikvõimalike 1-kaupa, 2-kaupa, 3-kaupa, ..., 1999-kaupa korrutiste summaga, avaldise

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2001}\right)-1$$

väärtus aga summaga, kus hulga A elementide kõikvõimalikud 2-kaupa, 4-kaupa, 6-kaupa, ..., 2000-kaupa korrutised võetakse plussmärgiga ja kõikvõimalikud 1-kaupa, 3-kaupa, 5-kaupa, ..., 1999-kaupa korrutised miinusmärgiga. Olgu ülesandes nõutud summa S, siis

$$\begin{aligned}
2S &= \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2001}\right)+\\
&\qquad +\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2001}\right)-2=\\
&= \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2002}{2001}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2000}{2001}-2=\\
&= \frac{2002}{2}+\frac{1}{2001}-2=999\frac{1}{2001}\,.
\end{aligned}$$

Seega $S=499\frac{1001}{2001}$.

Lahendus 2. Tähistagu S_k hulga $A_k=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{2k},\frac{1}{2k+1}\right\}$ elementide kõikvõimalike 1-kaupa, 3-kaupa, 5-kaupa, ..., $(2k-1)$-kaupa korrutiste summat ja T_k sama hulga elementide kõikvõimalike 0-kaupa, 2-kaupa, 4-kaupa, ..., $2k$-kaupa korrutiste summat (0-kaupa korrutise loeme võrdseks 1-ga). Siis otsitav arv on $T_{1000}-1$.

Otseselt leiame, et $S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ ja $T_1=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$. Lihtne kombinatoorne arutlus näitab, et

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= S_k+\frac{1}{2k+2}\cdot T_k+\frac{1}{2k+3}\cdot T_k+\frac{1}{(2k+2)}\frac{1}{(2k+3)}\cdot S_k=\\
&= \left(1+\frac{1}{(2k+2)(2k+3)}\right)\cdot S_k+\left(\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{2k+3}\right)\cdot T_k
\end{aligned}$$

ja analoogselt

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= T_k + \frac{1}{2k+2}\cdot S_k + \frac{1}{2k+3}\cdot S_k + \frac{1}{(2k+2)}\frac{1}{(2k+3)}\cdot T_k = \\ &= \left(1 + \frac{1}{(2k+2)(2k+3)}\right)\cdot T_k + \left(\frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+3}\right)\cdot S_k \ . \end{aligned}$$

Induktsiooniga k järgi saame neist seostest, et

$$S_k = \frac{k\cdot(2k+3)}{2\cdot(2k+1)}$$

ning

$$T_k = \frac{2k^2+3k+2}{2\cdot(2k+1)} \ .$$

Seega $T_{1000} - 1 = \dfrac{2003002}{4002} - 1 = \dfrac{1999000}{4002} = \dfrac{999500}{2001} = 499\dfrac{1001}{2001}$.

5. *Vastus:* 2001 .

Kuna arvud 37 ja 9 on ühistegurita, siis piisab leida algarvu 37 astendaja arvu

$$\underbrace{999\ldots\ldots99}_{3\cdot 37^{2000}\text{ numbrit}} = 10^{3\cdot 37^{2000}} - 1 = 1000^{37^{2000}} - 1$$

esituses algarvude astmete korrutisena.

Näitame induktsiooniga k järgi, et algarvu 37 astendaja arvu $1000^{37^k} - 1$ esituses algarvude astmete korrutisena on $k+1$. Juhul $k=0$ saame

$$1000^{37^0} - 1 = 999 = 3^3\cdot 37 \ ,$$

s.t. algarvu 37 astendaja on $1 = 0+1$.

Eeldame, et mingi k korral väide kehtib. Teisendame:

$$\begin{aligned} 1000^{37^{k+1}} - 1 &= \left(1000^{37^k}\right)^{37} - 1 = \\ &= \left(1000^{37^k} - 1\right)\cdot\left(1 + 1000^{37^k} + \left(1000^{37^k}\right)^2 + \ldots + \left(1000^{37^k}\right)^{36}\right) . \end{aligned}$$

Algarvu 37 astendaja arvu $1000^{37^k}-1$ esituses algarvude astmete korrutisena on vastavalt tehtud eeldusele $k+1$. Seega piisab näidata, et 37 astendaja arvu

$$1+1000^{37^k}+\left(1000^{37^k}\right)^2+\ldots+\left(1000^{37^k}\right)^{36}$$

esituses algarvude astmete korrutisena on 1. Kuna $1000 \equiv 1 \pmod{37}$, siis $1000^{37^k} \equiv 1 \pmod{37}$. Olgu $1000^{37^k}=37q+1$, siis

$$\begin{aligned}1+1000^{37^k}&+\left(1000^{37^k}\right)^2+\ldots+\left(1000^{37^k}\right)^{36}=\\&=1+(37q+1)+(37q+1)^2\ldots+(37q+1)^{36}\equiv\\&\equiv 1+(37q+1)+(2\cdot 37q+1)+\ldots+(36\cdot 37q+1)=\\&=\frac{37\cdot 36}{2}\cdot 37q+37=37^2\cdot 18\cdot q+37\equiv 37 \pmod{37^2}.\end{aligned}$$

Niisiis summa

$$1+1000^{37^k}+\left(1000^{37^k}\right)^2+\ldots+\left(1000^{37^k}\right)^{36}$$

jagub arvuga 37, kuid mitte arvuga 37^2, ning seega 37 astendaja arvu $1000^{37^{k+1}}-1$ esituses algarvude astmete korrutisena on $k+2$.

Algarvu 37 astendaja arvu $1000^{37^{2000}}-1$ esituses algarvude astmete korrutisena on seega $2000+1=2001$.

6. Olgu B' ja C' punktist A' ringjoonele $\mathcal{C}_1$ tõmmatud puutujate lõikepunktid ringjoonega $\mathcal{C}_2$ — siis ringjoon $\mathcal{C}_2$ on ilmselt kolmnurga $A'B'C'$ ümberringjooneks. Olgu r ja R vastavalt ringjoonte $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ raadiused ning S, O ja S' vastavalt ringjoonte $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ ja kolmnurga $A'B'C'$ siseringjoone keskpunktid. Et kiir $A'S$ on nurga $B'A'C'$ poolitaja, siis paikneb ka kolmnurga $A'B'C'$ siseringjoone keskpunkt sellel kiirel. Kuna nii ringjoon $\mathcal{C}_1$ kui ka kolmnurga $A'B'C'$ siseringjoon puutuvad kiiri $A'B'$ ja $A'C'$, siis piisab nende kokkulangemise tõestuseks näidata, et $S'=S$.

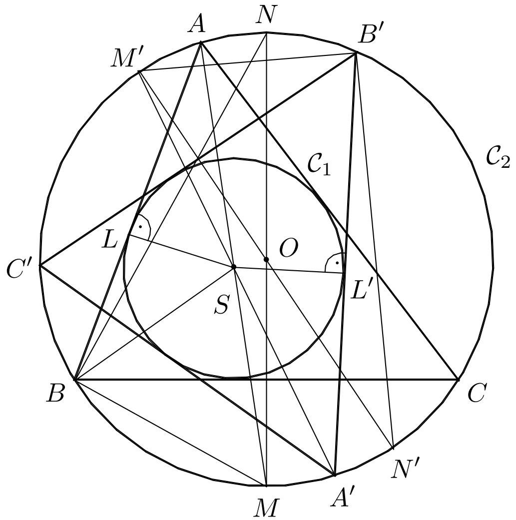
Olgu L ja L' ringjoone $\mathcal{C}_1$ puutepunktid vastavalt lõikudega AB ja $A'B'$, M ja M' vastavalt kiirte AS ja $A'S$ teised lõikepunktid ringjoonega $\mathcal{C}_2$ ning N ja N' punktid ringjoonel $\mathcal{C}_2$, mis paiknevad diametraalselt punktide M ja M' vastas (vt. joonist 3). Et

$$\angle MSB=\angle SAB+\angle SBA=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$$

ja

$$\angle MBS = \angle MBC + \angle CBS = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)\ ,$$

siis $|BM| = |SM|$. Analoogiliselt veendume, et $|B'M'| = |S'M'|$.



Joonis 3

Kuna $\angle LAS = \angle BAM = \angle BNM$ ja NM on ringjoone $\mathcal{C}_2$ diameeter, siis ALS ja NBM on sarnased täisnurksed kolmnurgad ning

$$\frac{|AS|}{|NM|} = \frac{|LS|}{|BM|} = \frac{|LS|}{|SM|}\ ,$$

kust $|AS| \cdot |SM| = |LS| \cdot |NM| = 2rR$.

Kuna $\angle L'A'S = \angle B'A'M' = \angle B'N'M'$ ja $N'M'$ on ringjoone $\mathcal{C}_2$ diameeter, siis $A'L'S$ ja $N'B'M'$ on sarnased täisnurksed kolmnurgad ning

$$\frac{|A'S|}{|N'M'|} = \frac{|L'S|}{|B'M'|} = \frac{|L'S|}{|S'M'|}\ ,$$

kust $|A'S| \cdot |S'M'| = |L'S| \cdot |N'M'| = 2rR$.

Et ringjoone $\mathcal{C}_2$ kõõlud AM ja $A'M'$ lõikuvad punktis S, siis

$$|A'S| \cdot |SM'| = |AS| \cdot |SM| = 2rR\,,$$

mistõttu $|A'S|\cdot|SM'| = |A'S|\cdot|S'M'|$ ning $|SM'| = |S'M'|$. Seega $S' = S$ ning $\mathcal{C}_1$ on kolmnurgale $A'B'C'$ siseringjooneks.