IMO'2001 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 14.–15. aprillil 2001. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

Esimene päev

1. Vaatleme koordinaattasandil kõikvõimalikke ristkülikuid, mille:
   (i) tipud on täisarvuliste koordinaatidega;
   (ii) küljed on paralleelsed koordinaattelgedega;
   (iii) pindala on 2^k, kus $k = 0, 1, 2 \ldots$.

   Kas kõik täisarvuliste koordinaatidega punktid saab värvida kahe värviga nii, et ühegi niisuguse ristküliku kõik tipud ei paikneks ühte ja sama värvi punktides?

2. Küljepikkusega a korrapärase n-nurga sisepiirkonnas võetud punkti X kaugused n-nurga külgedega määratud sirgetest on $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Tõesta, et

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \ldots + \frac{1}{h_n} > \frac{2\pi}{a} \,.$$

3. Tähistagu $\mathbb{R}$ kõigi reaalarvude hulka ning olgu k fikseeritud reaalarv. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad mistahes reaalarvude x ja y korral tingimust

$$f(x) + \big(f(y)\big)^2 = kf(x + y^2) \,.$$

IMO'2001 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 14.–15. aprillil 2001. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

Teine päev

4. Vaatleme hulga $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2000}, \frac{1}{2001} \right\}$ elementide kõikvõimalikke 2-kaupa, 4-kaupa, 6-kaupa, ..., 2000-kaupa korrutisi. Leia kõigi niisuguste korrutiste summa.

5. Leia algarvu 37 astendaja arvu $\underbrace{111\ldots\ldots11}_{3\cdot 37^{2000}\text{ numbrit}}$ esituses algarvude astmete korrutisena.

6. Olgu $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ vastavalt kolmnurga ABC sise- ja ümberringjoon. Tõesta, et mistahes punkti A' jaoks ringjoonel $\mathcal{C}_2$ leiduvad sellised punktid B' ja C', et $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ on kolmnurgale $A'B'C'$ vastavalt sise- ja ümberringjooneks.