

# Отборный конкурс в команду Эстонии на ММО'2000

Тарту, 19–20 апреля 2000 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.

Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

## Первый день

1. Даны 5 таких действительных чисел, что разность суммы любых трех из них и суммы двух оставшихся чисел положительна. Доказать, что произведение всех 10 таких разностей (соответствующих всем возможным тройкам чисел) не превышает произведения квадратов начальных 5 чисел.
2. Доказать, что 18 последовательных положительных целых чисел нельзя разделить на две группы так, чтобы произведения чисел в каждой из групп были бы равны.
3. Пусть вписанная окружность касается треугольника  $ABC$  в точках  $M$ ,  $N$  и  $K$ , а точка  $Q$  — центр окружности, проходящей через середины отрезков  $MN$ ,  $NK$  и  $KM$ . Доказать, что центры описанной и вписанной в треугольник  $ABC$  окружностей и точка  $Q$  находятся на одной прямой.

# Отборный конкурс в команду Эстонии на ММО'2000

Тарту, 19–20 апреля 2000 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.

Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

## Второй день

4. Найти все такие функции  $f(n)$  с целыми положительными значениями, которые определены для всех положительных целых чисел  $n$  и для каждого такого  $n$  удовлетворяют условию

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n.$$

5. Для треугольника  $ABC$  выполняется  $|AC| \neq |BC|$ . Выберем во внутренней области этого треугольника точку  $X$  и введем обозначения  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $\angle ACX = \varphi$  и  $\angle BCX = \psi$ . Доказать, что равенство

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \varphi \sin \psi}{\sin(\varphi - \psi)}$$

выполняется тогда и только тогда, когда точка  $X$  находится на медиане, проведенной из вершины  $C$  треугольника  $ABC$ .

6. Назовем бесконечную последовательность положительных целых чисел  $F$ -последовательностью, если каждый ее член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих членов. Можно ли разбить все множество положительных целых чисел на

- а) конечное;
- б) бесконечное

число  $F$ -последовательностей, не имеющих общих элементов?