IMO'2000 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 19.–20. aprillil 2000. a.

Ülesannete lahendused

Esimene päev

1. Olgu vaadeldavad arvud a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Paneme tähele, et

$$(a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5) \cdot (a_1 + a_4 + a_5 - a_2 - a_3) = \\ = a_1^2 - (a_2 + a_3 - a_4 - a_5)^2 \leqslant a_1^2 \, .$$

Analoogiliselt

$$\begin{aligned}
(a_2 + a_1 + a_4 - a_3 - a_5)(a_2 + a_3 + a_5 - a_1 - a_4) &\leqslant a_2^2 \, , \\
(a_3 + a_1 + a_5 - a_2 - a_4)(a_3 + a_2 + a_4 - a_1 - a_5) &\leqslant a_3^2 \, , \\
(a_4 + a_1 + a_3 - a_2 - a_5)(a_4 + a_2 + a_5 - a_1 - a_3) &\leqslant a_4^2 \, , \\
(a_5 + a_1 + a_2 - a_3 - a_4)(a_5 + a_3 + a_4 - a_1 - a_2) &\leqslant a_5^2 \, .
\end{aligned}$$

Nende võrratuste vastavate poolte korrutamisel saamegi ülesandes nõutud võrratuse.

2. *Lahendus 1.* Oletame vastuväiteliselt, et mingid 18 järjestikust positiivset täisarvu on nõutaval viisil kaheks rühmaks jaotatud. Siis ükski neist arvudest ei jagu 19-ga (sest 19-ga jaguvaid arve ei saa vaadeldava 18 arvu seas olla rohkem kui üks ning algarv 19 ei saa seetõttu olla mõlema rühma arvude korrutise teguriks). Seega annavad vaadeldavad 18 arvu 19-ga jagamisel jäägid 1, 2, 3, ..., 18. Olgu kummagi rühma arvude korrutis A, siis peab olema $A^2 \equiv 18! \pmod{19}$. Kuna Wilsoni teoreemi järgi $18! \equiv -1 \pmod{19}$, siis ka $A^{18} = (A^2)^9 \equiv -1 \pmod{19}$, kuid Fermat' väikese teoreemi järgi $A^{18} \equiv 1 \pmod{19}$ — vastuolu.

Lahendus 2. Oletame vastuväiteliselt, et leiduvad niisugused 18 järjestikust positiivset täisarvu, mida saab nõutaval viisil kaheks rühmaks jaotada, ning olgu K kõikide nende arvude korrutis. Esimene ja viimane neist 18 arvust jaguvad 17-ga (sest mistahes 18 järjestikuse arvu seas on 17-ga jaguvaid vähemalt üks, seega kummagi rühma arvude korrutis jagub

17-ga ning selliseid arve peab järelikult olema kaks). Samas ei jagu ükski neist 18 arvust 19-ga (sest mistahes 18 järjestikuse arvu seas on ülimalt üks 19-ga jaguv arv) — seega jagub 19-ga vaadeldavale 18 arvule eelnev arv. Niisiis esimene neist 18 arvust jagub 17-ga ja annab 19-ga jagades jäägi 1. Vähim niisugune arv on 153, mistõttu $K \geqslant 153 \cdot 154 \cdot \ldots \cdot 170$.

Teiselt poolt ei või vaadeldavast 18 arvust ükski omada 17-st suuremat algtegurit ning nende seas on ülimalt kaks 17-ga, kaks 13-ga ja kaks 11-ga jaguvat arvu, millest ükski ei jagu vastava algarvu kõrgema astmega; ülimalt kolm 7-ga jaguvat arvu, millest ülimalt üks jagub 7^2-ga; ülimalt neli 5-ga jaguvat arvu, millest ülimalt üks jagub 5^2-ga; täpselt kuus 3-ga jaguvat arvu, millest täpselt kaks jagub 3^2-ga ja ülimalt üks 3^3-ga; täpselt üheksa 2-ga jaguvat arvu, millest ülimalt viis jagub 2^2-ga, ülimalt kolm 2^3-ga, ülimalt kaks 2^4-ga ja ülimalt üks 2^5-ga. Seega ei saa kummagi rühma arvude korrutis olla suurem kui $17 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 7^2 \cdot 5^3 \cdot 3^6 \cdot 2^{15}$ ning

$$\begin{aligned} K &\leqslant 17^2 \cdot 13^2 \cdot 11^2 \cdot 7^4 \cdot 5^6 \cdot 3^{12} \cdot 2^{30} = \\ &= 100^3 \cdot 119^2 \cdot 144^6 \cdot 1001^2 < 153^{14} < 153 \cdot 154 \cdot \ldots \cdot 170 \end{aligned}$$

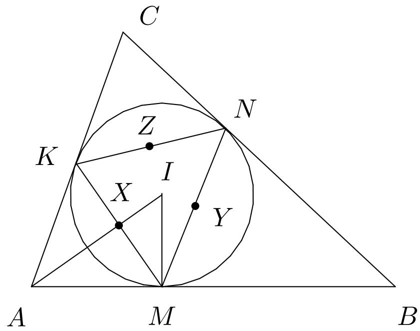
(sest $100^3 = 2^6 \cdot 5^6$, $119^2 = 7^2 \cdot 17^2$, $144^6 = 2^{24} \cdot 3^{12}$, $1001^2 = 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$ ja $1001^2 < 101^3 < 153^3$). Saadud vastuolu näitab, et ülesandes kirjeldatud omadusega 18 järjestikust arvu ei leidu.

Lahendus 3. (Idee: Indrek Zolk) Samuti nagu eelmises lahenduses oletame vastuväiteliselt, et nõutava omadusega 18 järjestikust arvu on olemas, ja veendume, et ükski neist arvudest ei saa omada 17-st suuremat algtegurit ning esimene ja viimane neist jaguvad 17-ga, kuid ei jagu 17^2-ga.

Edasi paneme tähele, et nende 18 arvu hulgas on täpselt 9 paaritut, millest igaüks peab omama algtegurina vähemalt ühte arvudest 3, 5, 7, 11 ja 13 — selleks piisab veenduda, et nende arvude hulgas ei saa olla 1 (kuna esimene arv peab jaguma 17-ga) ega 17 (kuna järjend 17, 18, ..., 34 sisaldab algarvu $19 > 17$). Teiselt poolt on aga mistahes 9 järjestikuse paaritu täisarvu hulgas täpselt kolm 3-ga jaguvat arvu ning ülimalt kaks 5-ga, ülimalt kaks 7-ga, ülimalt üks 11-ga ja ülimalt üks 13-ga jaguv arv. Seega saab igaüks vaadeldavast 9 arvust omada ainult üht nimetatud algteguritest, s.t. igaüks neist peab olema vastava algarvu aste, kuid 18 järjestikuse arvu seas ei saa olla rohkem kui ühte algarvude 5 ega 7 astet — vastuolu.

3. Olgu kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt I ja raadius r ning olgu X, Y ja Z vastavalt lõikude KM, MN ja NK keskpunktid (vt.

joonist 1). Näitame, et kolmnurga ABC ümberringjoon ja kolmnurga XYZ ümberringjoon (mille keskpunktiks on punkt Q) teisenevad teineteiseks inversioonil kolmnurga ABC siseringjoone suhtes. Tõepoolest, kiir IA on risti lõiguga KM ning läbib selle keskpunkti X, kusjuures $|IX| \cdot |IA| = |IM|^2 = r^2$ — selle võrduse kehtivuses veendumiseks piisab tähele panna, et AM on täisnurkse kolmnurga AXM ümberringjoone diameeter ning IM on sellele ringjoonele punktist I tõmmatud puutujalõik, ning rakendada teoreemi lõikajast ja puutujast. Seega teisenduvad punktid X ja A ülalmainitud inversioonil teineteiseks. Analoogiliselt veendume, et teineteiseks teisenduvad ka punktid Y ja B ning Z ja C.



Joonis 1

Teine päev

4. *Vastus:* $f(n) = n$ on ainus niisugune funktsioon.

   Kui $f(n) = f(m)$, siis ülesandes antud samasuse tõttu ilmselt $n = m$, s.t. f on üksühene funktsioon.

   Et $f(1)+f(f(1))+f(f(f(1))) = 3$ ning kõik liidetavad on positiivsed täisarvud, siis $f(1) = 1$. Näitame nüüd induktsiooniga n järgi, et $f(n) = n$ mistahes positiivse täisarvu n korral. Tõepoolest, olgu $f(k) = k$ iga $k < n$ korral, siis funktsiooni f üksühesuse tõttu peab olema $f(n) \geqslant n$. Oletame, et $f(n) > n$, siis jällegi f üksühesuse tõttu $f(f(n)) \geqslant n$ ja $f(f(f(n))) \geqslant n$ ning seega $f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) > 3n$ — vastuolu.

5. *Lahendus 1.* Olgu M tipust C tõmmatud mediaani aluspunkt. Tähistame lisaks $f(x, y) = \dfrac{\sin x \sin y}{\sin(x - y)}$, $\gamma = \angle ACB$, $\delta = \angle CMA$ ning $a = |BC|$,

$b = |AC|$, $c = |AB|$ ja $m = |CM|$.

Piisavus. Paiknegu punkt X mediaanil CM. Koosinusteoreemist kolmnurkades ACM ja BCM saame

$$a^2 + m^2 - 2am\cos\psi = \left(\frac{c}{2}\right)^2 = b^2 + m^2 - 2bm\cos\varphi$$

ning

$$a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - ac\cos\beta = m^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - bc\cos\alpha\ .$$

Siit $2m(a\cos\psi - b\cos\varphi) = a^2 - b^2 = c(a\cos\beta - b\cos\alpha)$ ning

$$a\cos\psi - b\cos\varphi = \frac{c}{2m}(a\cos\beta - b\cos\alpha)\ .$$

Siinusteoreemist kolmnurgas ACM saame $\dfrac{c}{2m} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$ ning seega

$$\frac{\sin\varphi}{a\cos\psi - b\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\dfrac{\sin\varphi}{\sin\alpha}(a\cos\beta - b\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{a\cos\beta - b\cos\alpha}\ . \tag{1}$$

Siinusteoreemist kolmnurgas ABC saame $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{a}{b}$ ja mediaani omadusest $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{a}{b}$. Siit leiame vastavalt

$$f(\alpha,\beta) = \frac{b\sin\alpha}{a\cos\beta - b\cos\alpha}$$

ja

$$f(\varphi,\psi) = \frac{b\sin\varphi}{a\cos\psi - b\cos\varphi}\ .$$

Arvestades võrdust (1) ongi vajalik väide tõestatud.

Tarvilikkus. Tähistame $F(X) = f(\angle ACX, \angle XCB)$. On selge, et $F(X)$ on konstantne punkti X nihutamisel mööda suvalist tipust C lähtuvat kiirt. Seega võime F vaadelda funktsioonina nurga ACX suurusest, kus $0 < \angle ACX < \gamma$. Kuna punkti X suvalise asendi korral

$\angle ACX + \angle XCB = \gamma$, siis

$$F(x) = \frac{\sin x \sin(\gamma - x)}{\sin(x-(\gamma-x))} = \frac{\cos(x-(\gamma-x)) - \cos(x+(\gamma-x))}{2\sin(x-(\gamma-x))} = \\ = \frac{\cos(2x-\gamma)-\cos\gamma}{2\sin(2x-\gamma)}$$

ning

$$F'(x) = \frac{-2\sin(2x-\gamma)\cdot\sin(2x-\gamma) - (\cos(2x-\gamma)-\cos\gamma)\cdot 2\cos(2x-\gamma)}{2(\sin(2x-\gamma))^2} = \\ = \frac{-(\sin(2x-\gamma))^2 - (\cos(2x-\gamma))^2 + \cos\gamma\cos(2x-\gamma)}{(\sin(2x-\gamma))^2} = \\ = \frac{-1+\cos\gamma\cos(2x-\gamma)}{(\sin(2x-\gamma))^2}\ .$$

Et γ on kolmnurga nurk, siis $-1 < \cos\gamma < 1$, mistõttu $F'(x) < 0$ iga x korral F' määramispiirkonnast ning F on rangelt kahanev kõikjal oma määramispiirkonnas. Funktsioon F on aga katkev ainult punktides, kus $\sin(2x-\gamma) = 0$, s.t. $2x-\gamma = n\pi$ ehk $x = \frac{\gamma}{2} + n\cdot\frac{\pi}{2}$, kus n on täisarv. Kuna γ on kolmnurga nurk, siis $\frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$, mistõttu $\frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{2} < 0$ ja $\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{2} > \gamma$. Seega F on katkev ainult nurga ACB poolitajal. On aga lihtne näha, et $F(0) = F(\gamma) = 0$. Seega kui $0 < x < \frac{\gamma}{2}$, siis $F(x) < 0$, ja kui $\frac{\gamma}{2} < x < \gamma$, siis $F(x) > 0$. Seega erinevatel tipust C lähtuvatel kiirtel on F väärtus erinev ning $F(X)$ saab olla võrdne suurusega $f(\alpha,\beta)$ ainult tipust C lähtuval mediaanil.

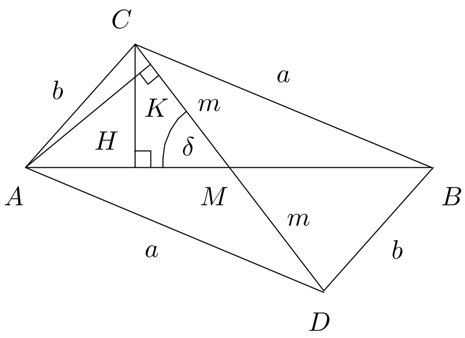
Lahendus 2. Kasutame samu tähistusi nagu eelmises lahenduses.

Piisavus. Kolmnurgast ABC saame $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$ ning seega

$$a\cos\beta - b\cos\alpha = 2\Big(\frac{c}{2} - b\cos\alpha\Big). \tag{2}$$

Täiendades kolmnurga ABC rööpkülikuks, mille neljas tipp D on sümmeetriline tipuga C punkti M suhtes (vt. joonist 2), saame $\angle CDB = \psi$ ning seega $2m = a\cos\psi + b\cos\varphi$ ja

$$a\cos\psi - b\cos\varphi = 2(m - b\cos\varphi)\ . \tag{3}$$



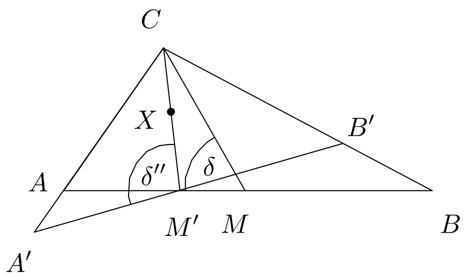
Joonis 2

Olgu H ja K vastavalt kolmnurga ACM tippudest C ja A tõmmatud kõrguste aluspunktid. Siis $|CH| = b\sin\alpha$ ja $|AK| = b\sin\varphi$. Olenevalt sellest, kas δ on terav- või nürinurk, saame $|MH| = \dfrac{c}{2} - b\cos\alpha$ ja $|MK| = m - b\cos\varphi$ või $|MH| = b\cos\alpha - \dfrac{c}{2}$ ja $|MK| = b\cos\varphi - m$. Leides samuti nagu esimeses lahenduses avaldised $f(\alpha,\beta)$ ja $f(\varphi,\psi)$ jaoks ning kasutades seoseid (2) ja (3) saame

$$f(\alpha,\beta) = \frac{b\sin\alpha}{a\cos\beta - b\cos\alpha} = \frac{b\sin\alpha}{2\left(\dfrac{c}{2} - b\cos\alpha\right)} = \frac{|CH|}{2|MH} = \frac{\tan\delta}{2}$$

ja

$$f(\varphi,\psi) = \frac{b\sin\varphi}{a\cos\psi - b\cos\varphi} = \frac{b\sin\varphi}{2(m - b\cos\varphi)} = \frac{|AK|}{2|MK} = \frac{\tan\delta}{2}\ .$$



Joonis 3

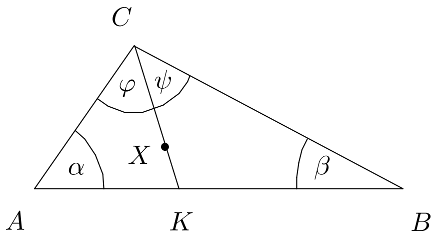
Tarvilikkus. Eeldame, et punkt X ei asu tipust C tõmmatud mediaanil, ja olgu M' kiire CX lõikepunkt küljega AB. Tõmbame punktist M' läbi sirge s nii, et $|A'M'| = |M'B'|$, kus A' ja B' on vastavalt sirge s lõikepunktid kiirtega CA ja CB. Siis CM' on kolmnurga $A'B'C$ mediaan (vt. joonist 3).

Olgu $\varphi' = \angle ACM$ ja $\psi' = \angle BCM$ ning $\delta' = \angle CM'A$ ja $\delta'' = \angle CM'A'$. On lihtne veenduda, et kui $\delta' < \delta$, siis $\delta'' < \delta'$ ja kui $\delta' > \delta$, siis $\delta'' > \delta'$. Seega alati $\delta \neq \delta''$. Piisavuse tõestusest selgus, et $f(\alpha, \beta) = f(\varphi', \psi') = \dfrac{\tan\delta}{2}$. Rakendades sama tulemust kolmnurga $A'CB'$ jaoks, saame $f(\varphi, \psi) = \dfrac{\tan\delta''}{2}$. Kuna $\delta \neq \delta''$ ja $0 < \delta, \delta'' < \pi$, siis $\tan\delta \neq \tan\delta''$ ning seega

$$f(\varphi, \psi) = \frac{\tan\delta''}{2} \neq \frac{\tan\delta}{2} = f(\varphi', \psi') = f(\alpha, \beta)\,.$$

Lahendus 3. Kui punkt X asub nurga ACB poolitajal, siis $\varphi = \psi$ ja $\sin(\varphi - \psi) = 0$, mistõttu antud võrdus ei saa kehtida. Eelduse $|AC| \neq |BC|$ põhjal aga sel juhul punkt X ei asu ka mediaanil. Eeldame edaspidi, et punkt X ei asu nurga ACB poolitajal. Siis suurused $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\varphi$, $\sin\psi$, $\sin(\alpha - \beta)$ ja $\sin(\varphi - \psi)$ on kõik nullist erinevad. Kuna $\alpha + \beta + \varphi + \psi = \pi$, siis $\sin(\alpha + \psi) = \sin(\beta + \varphi)$ ning seega

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)} \iff \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\varphi\sin\psi} \iff \\
&\quad\iff \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\varphi}{\sin\varphi\sin\psi} \iff \\
&\quad\iff \frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \iff \\
&\quad\iff \frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\psi}{\sin\psi} \iff \\
&\quad\iff \frac{\sin\varphi\cos\beta + \sin\beta\cos\varphi}{\sin\beta\sin\varphi} = \frac{\sin\psi\cos\alpha + \sin\alpha\cos\psi}{\sin\alpha\sin\psi} \iff \\
&\quad\iff \frac{\sin(\beta+\varphi)}{\sin\beta\sin\varphi} = \frac{\sin(\alpha+\psi)}{\sin\alpha\sin\psi} \iff \\
&\quad\iff \sin\alpha\sin\psi = \sin\beta\sin\varphi \iff \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\,.
\end{aligned}$$



Joonis 4

Olgu K kiire CX lõikepunkt küljega AB (vt. joonist 4). Siinusteoreemist kolmnurkades ACK ja BCK saame vastavalt $\dfrac{\sin\varphi}{|AK|} = \dfrac{\sin\alpha}{|CK|}$ ja $\dfrac{\sin\psi}{|BK|} = \dfrac{\sin\beta}{|CK|}$. Neist võrdustest tulenevalt $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi}\cdot\dfrac{|BK|}{|AK|}$. Seega

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} \iff |AK| = |BK|\,,$$

mida oligi tarvis tõestada.

6. *Vastus:* a) ei; b) jah.

   Lahendus 1. a) Paneme tähele, et mistahes positiivse täisarvu n korral saab lõigul $[2n,\,4n]$ paikneda ülimalt kaks ühe ja sama F-jada liiget. Seega, kui meil F-jadade arv on N, siis lõigul $[2N,\,4N]$ sisalduvast $2N+1$ arvust vähemalt üks ei kuulu ühelegi neist jadadest.

   b) Näitame kõigepealt, et mistahes positiivne täisarv esitub ühel ja ainult ühel viisil Fibonacci jada F (mis defineeritakse seostega $F_1 = 1$, $F_2 = 2$ ja $F_k = F_{k-2} + F_{k-1}$ iga $k \geqslant 3$ korral) erinevate liikmete summana nii, et liidetavate hulgas ei esine jada F kaht järjestikust liiget. Tõepoolest: nõutava esituse arvu n jaoks saame, valides esimeseks liidetavaks jada F suurima liikme F_{i_1}, mis ei ületa arvu n, järgmiseks liidetavaks jada F suurima liikme F_{i_2}, mis ei ületa arvu $n - F_{i_1}$, jne. Niiviisi valides on alati $i_{k+1} < i_k - 1$ (s.t. me ei vali liidetavate hulka jada F kaht järjestikust liiget), sest vastasel korral oleksime liidetava F_{i_k} asemel pidanud valima $F_{i_k-1} + F_{i_k} = F_{i_k+1}$. Kirjeldatud esituse ainuvõimalikkus järeldub induktsiooni abil kergesti tõestatavatest seostest

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1 < F_{2n}$$

ja

$$F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1 < F_{2n+1}\ .$$

Tõestatud väite võime sõnastada nii: iga positiivne täisarv omab üht ja ainult üht niisugust üleskirjutust "Fibonacci süsteemis" (s.t. jada F liikmete kordsete summana kordajatega 0 ja 1), mis ei sisalda kaht kõrvutiasetsevat numbrit 1. Näiteks arvu

$$30 = 21 + 8 + 1 = 1 \cdot 21 + 0 \cdot 13 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$

jaoks on selline üleskirjutus 1010001.

Olgu nüüd ω mistahes positiivse täisarvu esitus "Fibonacci süsteemis". Paneme tähele, et arvud esitustega ω, $\omega 0$, $\omega 00$, $\omega 000$, $\ldots$ moodustavad F-jada (see järeldub otseselt sellest, et jada F on ise F-jada). Seega saame kõikide positiivsete täisarvude hulga tükelduse ühiste elementideta F-jadadeks, valides kõikvõimalikud niisugused esitused ω_α, mille esimene ja viimane number on 1 ja mis ei sisalda kaht järjestikust numbrit 1, ning moodustades nende põhjal F-jadad ω_α, $\omega_\alpha 0$, $\omega_\alpha 00$, $\omega_\alpha 000$, $\ldots$.

Lahendus 2. a) osa tõestame samuti nagu lahenduses 1.

b) Esitame algoritmi niisuguste F-jadade $F^{(1)} = (F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, F_3^{(1)}, \ldots)$, $F^{(2)} = (F_1^{(2)}, F_2^{(2)}, F_3^{(2)}, \ldots)$, $\ldots$, $F^{(n)} = (F_1^{(n)}, F_2^{(n)}, F_3^{(n)}, \ldots)$, $\ldots$ defineerimiseks, millel pole ühiseid elemente ning mis üheskoos sisaldavad kõik positiivsed täisarvud. Tõepoolest, olgu $F^{(1)} = (1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots)$ ning kui jadad $F^{(1)}$, $F^{(2)}, \ldots, F^{(k-1)}$ on juba defineeritud, m on vähim arv, mis ei sisaldu üheski neist jadadest ning $m - 1 = F_i^{(s)}$, siis defineerime $F_1^{(k)} = m = F_i^{(s)} + 1$ ja $F_2^{(k)} = m = F_{i+1}^{(s)} + 1$.

Ilmselt sisaldub iga positiivne täisarv n mingis jadas $F^{(k)}$, kus $k \leqslant n$. Jääb üle veenduda, et jadadel $F^{(k)}$ ei ole ühiseid elemente — selleks paneme tähele, et:

(1) Jada $F^{(k)}$ järjestikuste elementide vahed moodustavad mittekahaneva jada, s.t. iga $j \geqslant 1$ korral kehtib võrratus

$$F_{j+2}^{(k)} - F_{j+1}^{(k)} \geqslant F_{j+1}^{(k)} - F_j^{(k)}\ .$$

Tõepoolest, vastavalt F-jada definitsioonile $F_{j+2}^{(k)} - F_{j+1}^{(k)} = F_j^{(k)}$ ning seega piisab näidata, et $F_{j+1}^{(k)} \leqslant 2F_j^{(k)}$. Mistahes $j > 1$ korral kehtib siin koguni range võrratus, sest $F_{j+1}^{(k)} = F_j^{(k)} + F_{j-1}^{(k)} < 2F_j^{(k)}$. Juhul $j = 1$ saame võrratuse $F_2^{(k)} \leqslant 2F_1^{(k)}$, mis kehtib vastavalt jadade $F^{(k)}$ konstruktsioonile: $F_2^{(1)} = 2 = 2F_1^{(1)}$ ning mistahes $k > 1$ korral saame $F_2^{(k)} = F_{i+1}^{(s)} + 1 \leqslant 2F_i^{(s)} + 1 < 2(F_i^{(s)} + 1) = 2F_1^{(k)}$, kus jada $F^{(s)}$ kasutasime jada $F^{(k)}$ defineerimisel.

(2) Kui jadade $F^{(s)}$ ja $F^{(t)}$ korral on $F_j^{(t)} < F_i^{(s)} < F_{j+1}^{(t)} < F_{i+1}^{(s)} < F_{j+2}^{(t)}$, siis $F_{j+p}^{(t)} < F_{i+p}^{(s)} < F_{j+p+1}^{(t)}$ ka iga $p \geqslant 2$ korral, kusjuures

$$F_{i+p}^{(s)} - F_{j+p}^{(t)} = (F_{i+p-2}^{(s)} - F_{j+p-2}^{(t)}) + (F_{i+p-1}^{(s)} - F_{j+p-1}^{(t)})$$

ja

$$F_{j+p+1}^{(t)} - F_{i+p}^{(s)} = (F_{j+p-1}^{(t)} - F_{i+p-2}^{(s)}) + (F_{j+p}^{(t)} - F_{i+p-1}^{(s)}) .$$

See järeldub otseselt sellest, et $F^{(s)}$ ja $F^{(t)}$ on F-jadad.

(3) Kui jadade $F^{(k)}$ ja $F^{(t)}$ korral $(t < k)$ on $F_j^{(t)} < F_1^{(k)} < F_{j+1}^{(t)}$, siis ka $F_{j+1}^{(t)} < F_2^{(k)} < F_{j+2}^{(t)}$, kusjuures

$$F_2^{(k)} - F_{j+1}^{(t)} \geqslant F_1^{(k)} - F_j^{(t)}$$

ja

$$F_{j+2}^{(t)} - F_2^{(k)} \geqslant F_{j+1}^{(t)} - F_1^{(k)} .$$

Tõepoolest, kui $k = 2$, siis järeldub see väide otseselt jada $F^{(2)}$ konstruktsioonist ja tähelepanekust (1) jada $F^{(1)}$ kohta. Kui $k > 2$, kasutame jada $F^{(k)}$ konstruktsiooni ning tähelepanekuid (3) ja (2) jada $F^{(s)}$ (mida kasutame $F^{(k)}$ defineerimisel) ning suvalise jada $F^{(t)}$ (kus $t < k$) kohta.

Tõestamaks ülalkirjeldatud konstruktsioonil lisatava jada $F^{(k)}$ lõikumatust mistahes olemasoleva jadaga $F^{(t)}$ (kus $t < k$) rakendame nüüd tähelepanekuid (3) ja (2) jadadele $F^{(k)}$ ja $F^{(t)}$.