

IMO'2000 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 19.–20. aprillil 2000. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

Esimene päev

1. On antud 5 niisugust reaalarvu, et valides neist välja mistahes kolm, on valitud kolme arvu summa ja ülejäänud kahe arvu summa vahe positiivne. Tõesta, et kõigi 10 niisuguse vahe (mis vastavad kõikvõimalikele valitud arvude kolmikutele) korrutis ei ületa antud 5 arvu ruutude korrutist.
2. Tõesta, et 18 järjestikust positiivset täisarvu ei saa jaotada kaheks rühmaks nii, et kumbagi rühma kuuluvate arvude korrutised oleksid võrdsed.
3. Olgu M , N ja K kolmnurga ABC siseringjoone puutepunktid kolmnurga külgedega ning olgu Q sellise ringjoone keskpunkt, mis läbib lõikude MN , NK ja KM keskpunkte. Tõesta, et kolmnurga ABC siseringjoone ja ümberringjoone keskpunktid ning punkt Q paiknevad ühel sirgel.

IMO'2000 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 19.–20. aprillil 2000. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

Teine päev

4. Leia kõik sellised positiivsete täisarvuliste väärtustega funktsioonid $f(n)$, mis on määratud kõikide positiivsete täisarvude n jaoks ning rahuldavad iga niisuguse n korral tingimust

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n.$$

5. Kolmnurgas ABC on $|AC| \neq |BC|$. Valime selle kolmnurga sisepiirkonnas punkti X ning tähistame $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle ACX = \varphi$ ja $\angle BCX = \psi$. Tõesta, et võrdus

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \varphi \sin \psi}{\sin(\varphi - \psi)}$$

kehtib siis ja ainult siis, kui punkt X paikneb kolmnurga ABC tipust C tõmmatud mediaanil.

6. Nimetame lõpmatut positiivsete täisarvude jada F -jadaks, kui selle iga liige alates kolmandast on võrdne kahe eelneva liikme summaga. Kas kogu positiivsete täisarvude hulka on võimalik tükeldada

- a) lõplikuks;
- b) lõpmatuks

arvuks ühiste elementideta F -jadadeks?