Отборный конкурс в команду Эстонии на ММО’99

Тарту, 1–2 мая 1999 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

Первый день

1. Найдется ли последовательность целых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, удовлетворяющая обоим следующим условиям?
   а) Каждое целое положительное число встречается в этой последовательности бесконечное число раз.
   б) При любом целом $n \geqslant 1$ последовательность $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}, \ldots$ (где $a_i^{(n)}$ есть остатки, полученные при делении чисел a_i на число n) *периодична*, т.е. найдется целое число $T_n \geqslant 1$ такое, что $a_{i+T_n}^{(n)} = a_i^{(n)}$ при любом индексе i).

2. На плоскости даны n различных окружностей одинакого радиуса, никакие две из которых не касаются, причем каждая данная окружность пересекает по крайней мере одну из остальных. Доказать, что всего эти окружности имеют не менее n различных точек пересечения.

3. Пусть $n \geqslant 2$ и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ неотрицательные действительные числа, при которых выполняется равенство

$$c_1c_2 + c_2c_3 + \ldots + c_{n-1}c_n + c_nc_1 = 1 .$$

   Найти наименьшее возможное значение суммы $S_n = c_1+c_2+\ldots+c_n$ при заданном n.

Отборный конкурс в команду Эстонии на ММО'99

Тарту, 1–2 мая 1999 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

Второй день

4. На игровую доску, состоящую из 30×30 клеток, расположат кости домино до тех пор, когда станет невозможным добавить новых костей (каждая кость покрывает две соседние клетки). Доказать, что на игровой доске не менее 300 костей домино.

5. Функция f определена при всех действительных значений аргумента x, принимает действительные значения и обладает следующими свойствами:

   а) при любых действительных x и y выполняется равенство
   $$f(x+f(y)+yf(x)) = y+f(x)+xf(y)\ ;$$

   б) отношение $\dfrac{f(x)}{x}$ при отличных от нуля действительных x принимает только конечное число различных значений.

   Найти все такие функции f.

6. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторону BC в точке K. Пусть N и M соответственно середины отрезков BC и AK. Доказать, что точки M, O и N расположены на одной прямой.