IMO'99 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 1.–2. mail 1999. a.

Ülesannete lahendused

Esimene päev

1. *Vastus:* jah, selline jada leidub.

Konstrueerime nõutud omadustega jada induktiivselt, moodustades igal sammul olemasolevast lõplikust järjendist A_k uue järjendi A_{k+1}, mille algusosaks on järjend A_k.

1) Järjend A_1 koosnegu ühestainsast arvust $a_1 = 1$.
2) Olgu $A_k = (a_1, \ldots, a_s)$, siis järjend A_{k+1} koosnegu järgmistest arvudest:

$$\begin{array}{l}
a_1 + 0 \cdot k!\,,\ a_2 + 0 \cdot k!\,,\ \ldots\,,\ a_s + 0 \cdot k!\,, \\
a_1 + 0 \cdot k!\,,\ a_2 + 0 \cdot k!\,,\ \ldots\,,\ a_s + 0 \cdot k!\,, \\
a_1 + 1 \cdot k!\,,\ a_2 + 1 \cdot k!\,,\ \ldots\,,\ a_s + 1 \cdot k!\,, \\
a_1 + 2 \cdot k!\,,\ a_2 + 2 \cdot k!\,,\ \ldots\,,\ a_s + 2 \cdot k!\,, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_1 + k \cdot k!\,,\ a_2 + k \cdot k!\,,\ \ldots\,,\ a_s + k \cdot k!\,.
\end{array}$$

Jääb üle veenduda, et saadaval jadal on kõik nõutavad omadused. Tõepoolest, $A_1 = (1)$ ja $A_2 = (1, 1, 2)$ ning kui järjend A_k sisaldab kõik arvud 1, 2, ..., $k!$, siis vastavalt konstruktsioonile sisaldab järjend A_{k+1} kõik arvud 1, 2, ..., $(k+1)!$ — seega sisaldab konstrueeritud jada tõepoolest kõik positiivsed täisarvud. Et iga järjend A_{k+1} sisaldab järjendi A_k kaks korda, siis on ka ilmne, et iga jadas esinev arv esineb seal lõpmata palju kordi. Vaadeldes mistahes $n \geqslant 1$ korral järjenditesse A_i kuuluvaid arve "modulo n" näeme, et järjend A_{n+1} koosneb $n+2$ korda võetud järjendist A_n, järjend A_{n+2} omakorda koosneb $n+3$ korda võetud järjendist A_{n+1} jne. ning seega võime perioodiks T_n võtta järjendi A_n pikkuse.

2. *Lahendus 1.* Seisku antud ringjoonte igas lõikepunktis maaler värvipotiga (kõigis pottides on ühepalju värvi) ning kasutagu ta potis oleva värvi võrdsete osadena kõikide selles punktis lõikuvate ringjoonte värvimiseks

(nii et kui antud punktis lõikub k ringjoont, siis kulutab maaler igaühele neist $\frac{1}{k}$ potitäit värvi). Ilmselt piisab näidata, et igale ringjoonele kulutavad kõik sellel paiknevad maalrid kokku vähemalt 1 potitäie värvi: siis kõigi ringjoonte peale kokku kulutatakse vähemalt n potitäit värvi ning maalreid (ja ühtlasi ringjoonte lõikepunkte) peab seega kokku olema vähemalt n.

Vaatleme suvalist ringjoont C ning olgu P sellel paiknev lõikepunkt, milles asuv maaler kulutab ringjoone C värvimiseks vähima koguse värvi (kui selliseid punkte on mitu, siis valime suvalise neist). Olgu see vähim kogus $\frac{1}{m}$ potitäit: siis läbib punkti P lisaks ringjoonele C veel täpselt $m-1$ ringjoont. Igaüks neist $m-1$ ringjoonest lõikab ringjoont C veel ühes punktis ning need lõikepunktid on kõik erinevad (sest kahe võrdse raadiusega ringjoone vastastikune paiknemine on nende lõikepunktidega üheselt määratud). Seega paikneb ringjoonel C vähemalt m lõikepunkti ning igaühes neist paiknev maaler kulutab ringjoonele C vähemalt $\frac{1}{m}$ potitäit värvi. Niisiis kulutatakse ringjoone C värvimiseks kokku vähemalt $m \cdot \frac{1}{m} = 1$ potitäis värvi.

Lahendus 2. Seisku maalrid ühesuuruste värvipottidega antud ringjoonte keskpunktides ning värvigu iga maaler vastava ringjoone lõikepunktid ülejäänud ringjoontega, kulutades igaühele neist võrdsel hulgal värvi (nii et kui ringjoonel paikneb k lõikepunkti, siis kulutab maaler igaühele neist $\frac{1}{k}$ potitäit värvi). Näitame, et igale lõikepunktile kulutavad kõigi seda läbivate ringjoonte keskpunktides asuvad maalrid kokku ülimalt 1 potitäie värvi — et kõigi lõikepunktide peale kokku kulutatakse n potitäit värvi, siis peab lõikepunkte olema vähemalt n.

Vaatleme antud ringjoonte suvalist lõikepunkti P ning olgu C see ringjoon, mille keskpunktis olev maaler kulutas punktile P kõige rohkem värvi (kui selliseid ringjooni on mitu, siis valime suvalise neist). Olgu see värvikogus $\frac{1}{m}$ potitäit. See tähendab, et ringjoonel C paikneb lisaks punktile P veel täpselt $m-1$ lõikepunkti. Paneme tähele, et iga punkti P läbiv ringjoon (peale C) lõikub ringjoonega C veel ühes punktis, kusjuures need punktid on kõik erinevad. Seega punkti P läbib ülimalt m ringjoont ning neist igaühe keskpunktis asuv maaler kulutas punkti P värvimiseks ülimalt $\dfrac{1}{m}$ potitäit värvi: seega kulutati punktile P kokku ülimalt $m\cdot\dfrac{1}{m}=1$ potitäis värvi.

3. *Vastus:* kui $n \leqslant 3$, siis $\sqrt{n}$; kui $n \geqslant 4$, siis 2.

Kui $n=2$, siis

$$S_2^2 = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2 = (c_1-c_2)^2 + 2(c_1c_2 + c_2c_1) \geqslant 2\,.$$

Seega $S_2 \geqslant \sqrt{2}$; võrduse saame, kui $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Kui $n=3$, siis

$$\begin{aligned} S_3^2 &= c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + 2(c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1) = \\ &= \frac{1}{2}\big((c_1-c_2)^2 + (c_2-c_3)^2 + (c_3-c_1)^2\big) + 3(c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1) \geqslant 3\,. \end{aligned}$$

Seega $S_3 \geqslant \sqrt{3}$; võrduse saame, kui $c_1 = c_2 = c_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Kui $n=4$, siis

$$\begin{aligned} S_4^2 &= \big((c_1+c_3) + (c_2+c_4)\big)^2 = \\ &= \big((c_1+c_3) - (c_2+c_4)\big)^2 + 4(c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_4 + c_4c_1) \geqslant 4\,. \end{aligned}$$

Seega $S_4 \geqslant 2$ ning võrduse saame näiteks siis, kui $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \dfrac{1}{2}$.

Olgu nüüd $n \geqslant 5$. Kui n on paarisarv, siis

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \big((c_1 + c_3 + \ldots + c_{n-1}) - (c_2 + c_4 + \ldots + c_n)\big)^2 + \\ &+ 4(c_1c_2 + c_1c_4 + \ldots + c_1c_n + \ldots + c_{n-1}c_2 + c_{n-1}c_4 + \ldots + c_{n-1}c_n) \geqslant \\ &\geqslant 4(c_1c_2 + c_2c_3 + \ldots + c_{n-1}c_n + c_nc_1) = 4\,. \end{aligned}$$

Seega $S_n \geqslant 2$ ning võrduse saame näiteks siis, kui $c_n = c_{n-2} = \dfrac{1}{2}$, $c_{n-1} = 1$ ning $c_{n-3} = \ldots = c_2 = c_1 = 0$.

Olgu lõpuks $n \geqslant 5$ paaritu arv; üldisust kitsendamata võime eeldada, et $c_1 = \min(c_1, \ldots, c_n)$. Siis

$$\begin{aligned} S_n^2 = &\left((c_1 + c_3 + \ldots + c_{n-2} + c_n) - (c_2 + c_4 + \ldots + c_{n-1})\right)^2 + \\ &+ 4(c_1c_2 + c_1c_4 + \ldots + c_1c_{n-1} + \ldots + c_nc_2 + c_nc_4 + \ldots + c_nc_{n-1}) \geqslant \\ &\geqslant 4(c_1c_2 + c_2c_3 + \ldots + c_{n-1}c_n + c_nc_2) \geqslant \\ &\geqslant 4(c_1c_2 + c_2c_3 + \ldots + c_{n-1}c_n + c_nc_1) = 4\,. \end{aligned}$$

Seega $S_n \geqslant 2$ ning võrduse saame jällegi näiteks siis, kui $c_n = c_{n-2} = \frac{1}{2}$, $c_{n-1} = 1$ ning $c_{n-3} = \ldots = c_2 = c_1 = 0$.

Teine päev

4. Jaotame mängulaua 300 võrdseks ristkülikuks laiusega 3 ruutu ja kõrgusega 1 ruut. Iga niisuguse ristküliku kolmest ruudust peab vähemalt üks olema doominokiviga kaetud, sest vastasel korral saaksime täiendava doominokivi mängulauale lisada. Kui ristkülikus on doominokividega kaetud kaks või kolm ruutu, siis on kaetud vähemalt kaks kolmandikku selle ristküliku pindalast. Kui kaetud on ainult üks ruut, siis peab see olema keskmine ning seda kattev doominokivi paikneb vertikaalselt ja katab keskmise ruudu ka naaberristkülikus. Et mängulauale poleks võimalik doominokivisid lisada, peavad selles naaberristkülikus olema kaetud ka mõlemad äärmised ruudud ning nende kahe ristküliku kogupindalast on niisiis kaetud kaks kolmandikku.

   Seega saame kogu mängulaua jaotada ühest või kahest ristkülikust koosnevateks osadeks, kusjuures iga osa pindalast vähemalt kaks kolmandikku on doominokividega kaetud. Seega on doominokividega kokku kaetud vähemalt $\frac{2}{3} \cdot 900 = 600$ ruutu ning kive peab niisiis olema vähemalt 300.

5. *Vastus:* ainus selline funktsioon on $f(x) = x$.

   Lahendus 1. Tähistagu A_c nende nullist erinevate reaalarvude x hulka, mille korral $f(x) = cx$. Vastavalt tingimusele b) leidub ainult lõplik arv mittetühje hulki A_c ning kuna need kokku sisaldavad kõik nullist erinevad reaalarvud, siis leidub hulk A_{c_0}, milles on lõpmata palju elemente.

   Järgmiseks näitame, et hulgas A_1 on lõpmata palju elemente. Tõepoolest, kui reaalarv x kuulub hulka A_{c_0}, siis võttes tingimuses a) $y = x$, saame

$f(x + c_0x + c_0x^2) = x + c_0x + c_0x^2$, s.t. arv $c_0x^2 + (c_0{+}1)x$ kuulub hulka A_1. Et kordajad c_0 ja $c_0 + 1$ pole siin korraga nullid, siis vastab lõpmata paljudele erinevatele x väärtustele ka lõpmata palju erinevaid avaldise $c_0x^2 + (c_0{+}1)x$ väärtusi.

Tõestame nüüd, et kõik nullist erinevad reaalarvud kuuluvad hulka A_1. Selleks oletame vastuväiteliselt, et leiduvad reaalarvud $y \neq 0$ ja $c \neq 1$ nii, et $f(y) = cy$. Olgu x suvaline arv hulgast A_1, siis tingimusest a) saame $f(x + cy + yx) = y + x + xcy$. Paneme tähele, et $y = -1$ korral ei saa olla $c = 0$, sest vastasel korral saaksime võrduse $f(0) = x - 1$, mis ei saa kehtida kõikide x väärtuste korral hulgast A_1. Seega leidub hulgas A_1 lõpmata palju niisuguseid arve x, mille korral $x + cy + yx \neq 0$. Vastavalt tingimusele b) võib suhe $\dfrac{f(x + cy + yx)}{x + cy + yx} = \dfrac{(1 + cy)x + y}{(1 + y)x + cy}$ kõikvõimalike arvude x korral hulgast A_1 omandada ainult lõpliku arvu erinevaid väärtusi — uurime, millal on see võimalik.

Leiame funktsiooni $F(x) = \dfrac{(1 + cy)x + y}{(1 + y)x + cy}$ tuletise:

$$F'(x) = \frac{(1 + cy)\big((1 + y)x + cy\big) - (1 + y)\big((1 + cy)x + y\big)}{((1 + y)x + cy)^2} =$$
$$= \frac{y(c - 1)(cy + y + 1)}{((1 + y)x + cy)^2} .$$

Kui $cy + y + 1 \neq 0$, siis on see tuletis funktsiooni $F(x)$ kogu määramispiirkonnas nullist erinev ja sama märgiga, s.t. funktsioon $F(x)$ on kogu oma määramispiirkonnas kas rangelt kasvav või rangelt kahanev ja omandab lõpmata paljude x väärtuste korral ka lõpmata palju erinevaid väärtusi. Seega peab kehtima võrdus $cy + y + 1 = 0$, ehk $y = -\dfrac{1}{c + 1}$. Siis aga $x + cy + yx = (x - 1)(y + 1)$ ning

$$f(x + cy + yx) = y + x + xcy = -y(x{-}1) = -\frac{y}{y + 1} \cdot (x{-}1)(y{+}1) =$$
$$= \frac{1}{c}(x - 1)(y + 1)$$

(paneme tähele, et $y = -1$ oleks samaväärne võrdusega $c = 0$ ning eelmises lõigus tõestatu põhjal peab järelikult olema $y \neq -1$ ja $c \neq 0$).

Tähistame $C = \dfrac{1}{c}$ ja $Y = (x-1)(y+1)$ ning paneme tähele, et $C \neq 1$. Valides arvu x hulgast A_1 nii, et $Y \neq 0$ ja $Y \neq -\dfrac{1}{C+1}$ ning korrates eelmises lõigus toodud arutlust arvude Y ja C jaoks (y ja c asemel) näeme, et suhe $\dfrac{f(X+CY+YX)}{X+CY+YX}$, kus arv X võetakse hulgast A_1, omandab lõpmata palju erinevaid väärtusi, mis on vastuolus tingimusega b). Saadud vastuolu näitabki, et mistahes $y \neq 0$ korral peab kehtima võrdus $f(y) = y$.

Jääb üle näidata, et ka $f(0) = 0$. Olgu näiteks $x = -\dfrac{1}{2}$ ja $y = 1$ — siis $f(x) = x$ ja $f(y) = y$ ning vastavalt tingimusele a) saame

$$f(0) = f(x + f(y) + yf(x)) = y + f(x) + xf(y) = 0\ .$$

Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses näitame, et hulk A_1 sisaldab lõpmata palju elemente. Võttes tingimuses a) $x = y = -1$, saame $f(-1) = -1$, seega arv -1 kuulub hulka A_1.

Et funktsiooni

$$\frac{Ax+B}{Cx+D} = \frac{A}{C} + \frac{B - \dfrac{DA}{C}}{Cx+D}$$

graafik on hüperbool, kui $C \neq 0$ ja $BC \neq DA$, siis võib murru

$$\frac{f(x+f(y)+yf(x))}{x+f(y)+yf(x)} = \frac{y+x+xf(y)}{x+f(y)+yx} = \frac{(1+f(y))x+y}{(1+y)x+f(y)}\ ,$$

kus x on suvaline arv hulgast A_1 ning $y \neq -1$ on fikseeritud, erinevate väärtuste hulk olla lõplik vaid siis, kui $(1+f(y))f(y) = y(1+y)$, ehk $f(y) - y = (y - f(y))(y + f(y))$.

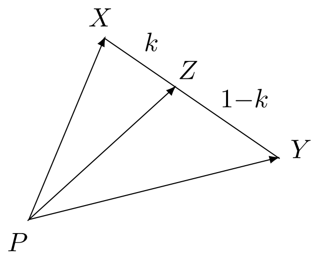
Oletame nüüd vastuväiteliselt, et leidub reaalarv y, mille korral $f(y) \neq y$. Siis vastavalt esimeses lõigus näidatule $y \neq -1$. Et $f(y) - y \neq 0$, siis tingimusest $f(y) - y = (y - f(y))(y + f(y))$ saame $y + f(y) = -1$, ehk $f(y) = -y - 1$. Valime arvu x hulgast A_1 nii, et $x \neq 1$ ja $x \neq 0$, siis $x + f(y) + yx = (x-1)(y+1)$ ja $f(x+f(y)+yx) = y+x+xf(y) = y(1-x)$. Kui nüüd $f((x-1)(y+1)) = y(1-x) \neq (x-1)(y+1)$, siis eespool tõestatu põhjal peab olema $f((x-1)(y+1)) = y(1-x) = -(x-1)(y+1) - 1$ ehk $x = 0$, mis on vastuolus arvu x valikuga. Kui aga $y(1-x) = (x-1)(y+1)$, siis $y = -\frac{1}{2}$ ning $f(y) = -y - 1 = -\frac{1}{2} = y$, mis on vastuolus arvu y valikuga.

6. *Lahendus 1.* Olgu Z suvaline punkt lõigul XY, kusjuures $|XZ| = k\cdot|XY|$ ja $|YZ| = (1-k)\cdot|XY|$. Siis mistahes punkti P korral kehtib võrdus $\overrightarrow{PZ} = (1-k)\cdot\overrightarrow{PX} + k\cdot\overrightarrow{PY}$. Tõepoolest,

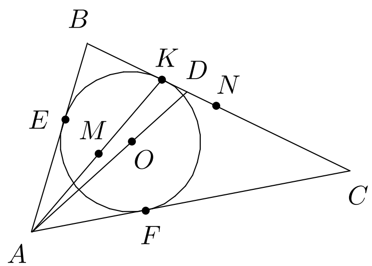
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PZ} &= \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{PX} + k\cdot\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PX} + k\cdot(\overrightarrow{PY} - \overrightarrow{PX}) = \\ &= (1-k)\cdot\overrightarrow{PX} + k\cdot\overrightarrow{PY}\end{aligned}$$

(vt. joonist 1). Avaldame seda seost kasutades vektorid $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AM}$ ja $\overrightarrow{AO}$ vektorite $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ kaudu. Kasutame standardseid tähistusi $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ ja $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Et $|BN| = |CN| = \frac{1}{2}|BC|$, siis $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$.



Joonis 1



Joonis 2

Olgu E ja F vastavalt kolmnurga ABC siseringjoone puutepunktid küljedega AB ja AC (vt. joonist 2), siis

$$\begin{aligned}|BK| &= |BE| = c - |AE| = c - |AF| = c - b + |CF| = c - b + |CK| = \\ &= c - b + a - |BK|,\end{aligned}$$

kust $|BK| = \frac{a-b+c}{2} = p - b$. Analoogiliselt saame $|CK| = p - c$. Seega

$\overrightarrow{AK} = \dfrac{p-c}{a} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{p-b}{a} \cdot \overrightarrow{AC}$ ning $\overrightarrow{AM} = \dfrac{p-c}{2a} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{p-b}{2a} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Olgu D tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikepunkt küljega BC, siis kehtib võrdus $\dfrac{|BD|}{c} = \dfrac{|CD|}{b}$. Seega $\overrightarrow{AD} = \dfrac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{AC}$ ning $\overrightarrow{AO} = bx \cdot \overrightarrow{AB} + cx \cdot \overrightarrow{AC}$, kus x on mingi reaalarvuline kordaja. Analoogiliselt $\overrightarrow{CO} = ay \cdot \overrightarrow{CA} + by \cdot \overrightarrow{CB}$ mingi reaalarvulise kordaja y korral ning arvestades seoseid $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ saame

$$bx \cdot \overrightarrow{AB} + cx \cdot \overrightarrow{AC} = by \cdot \overrightarrow{AB} + (1 - ay - by) \cdot \overrightarrow{AC},$$

ehk $(bx - by) \cdot \overrightarrow{AB} + (ay + by + cx - 1) \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Et vektorid $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ ei ole kollineaarsed ning $b \neq 0$, siis $y = x$ ja $(a+b+c)x = 1$, kust $x = 2p$. Niisiis saame lõpptulemusena $\overrightarrow{AO} = \dfrac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Nüüd piisab kontrollida, et vektorid $\overrightarrow{MO}$ ja $\overrightarrow{ON}$ on kollineaarsed. Tõepoolest,

$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AM} = \left(\frac{b}{2p} - \frac{p-c}{2a}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{2p} - \frac{p-b}{2a}\right) \cdot \overrightarrow{AC}$$

ning

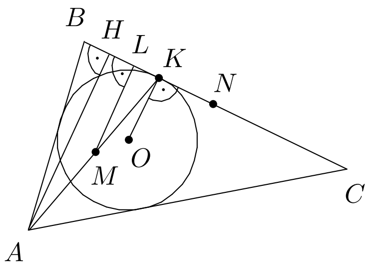
$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AO} = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2p}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2p}\right) \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Kordajaid teisendades saame

$$\begin{aligned}\frac{b}{2p} - \frac{p-c}{2a} &= \frac{ab - p(p-c)}{2ap} = \frac{4ab + \big(c + (a+b)\big)\big(c - (a+b)\big)}{8ap} = \\ &= \frac{c^2 - (a+b)^2 + 4ab}{8ap} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{8ap} = \\ &= \frac{(c+a-b)(c+b-a)}{8ap} = \frac{(p-b)(p-a)}{2ap}\end{aligned}$$

ja analoogiliselt $\dfrac{c}{2p} - \dfrac{p-b}{2a} = \dfrac{(p-c)(p-a)}{2ap}$ ning $\dfrac{1}{2} - \dfrac{b}{2p} = \dfrac{p-b}{2p}$ ja $\dfrac{1}{2} - \dfrac{c}{2p} = \dfrac{p-c}{2p}$. Seega $\overrightarrow{MO} = \dfrac{p-a}{p} \cdot \overrightarrow{ON}$.

Lahendus 2. Nagu eelmiseski lahenduses, kasutame standardseid tähistusi a, b, c ja p. Lisaks olgu L punktist M küljele BC tõmmatud ristlõigu aluspunkt, H tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt ning tähistagu h kõrguse AH pikkust ja r kolmnurga siseringjoone raadiust. Juhul $b = c$ langevad tipust A tõmmatud mediaan ja nurgapoolitaja kokku, punktid O ja M paiknevad lõigul AM ning tõestatav väide on ilmne — niisiis võime üldisust kitsendamata eeldada, et $b > c$ (selline olukord on kujutatud joonisel 3; vastasel juhul vahetame tippude B ja C tähistused).



Joonis 3

Ülesandes esitatud väite tõestamiseks piisab näidata, et $\dfrac{|KO|}{|KN|} = \dfrac{|LM|}{|LN|}$ ehk $|KO| \cdot |LN| = |KN| \cdot |LM|$. Kuna $|KO| = r = \dfrac{ah}{2p}$, $|LM| = \dfrac{h}{2}$ ja $|LN| = |KN| + |KL|$, siis saame tõestatava võrduse kirjutada kujul $a \cdot (|KN| + |KL|) = p \cdot |KN|$. Leiame nüüd lõikude KN ja KL pikkused.

Samuti nagu eelmises lahenduses leiame, et $|BK| = p - b$ ja $|CK| = p - c$ ning seega $|KN| = \dfrac{|CK| - |BK|}{2} = \dfrac{b - c}{2}$. Täisnurksetest kolmnurkadest AHB ja AHC saame $c^2 - |BH|^2 = h^2 = b^2 - |CH|^2$. Kui $\angle B \leqslant 90^\circ$, siis $|CH| = a - |BH|$ ning asendades ja sarnaseid liikmeid koondades saame avaldada $|BH| = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$. Võrdusest $|KL| = \dfrac{|KH|}{2} = \dfrac{|BK| - |BH|}{2}$ saame nüüd $|KL| = \dfrac{p - b}{2} - \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4a}$. Kui $\angle B > 90^\circ$, siis $|CH| = a + |BH|$ ja $|BH| = -\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$, kuid $|KL| = \dfrac{|BK| + |BH|}{2}$

ning kokkuvõttes ikkagi $|KL| = \dfrac{p-b}{2} - \dfrac{a^2+c^2-b^2}{4a}$.

Asendades lõikude KN ja KL pikkused tõestatavasse võrdusse, saame

$$a \cdot \left(\frac{b-c}{2} + \frac{p-b}{2} - \frac{a^2+c^2-b^2}{4a} \right) = p \cdot \frac{b-c}{2} \ ,$$

ehk $2pa - 2ca - a^2 - c^2 + b^2 = 2p(b-c)$. Selle võrduse kehtivuses võime kergesti veenduda, tehes asenduse $2p = a + b + c$ ja avades sulud.