IMO'99 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 1.–2. mail 1999. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

Esimene päev

1. Kas leidub positiivsete täisarvude jada $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, mis rahuldab mõlemat järgmist tingimust?
   a) Iga positiivne täisarv esineb selles jadas lõpmata palju kordi.
   b) Mistahes täisarvu $n \geqslant 1$ korral on jada $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}, \ldots$ (kus $a_i^{(n)}$ on arvude a_i jagamisel arvuga n tekkivad jäägid) *perioodiline*, s.t. leidub täisarv $T_n \geqslant 1$, nii et $a_{i+T_n}^{(n)} = a_i^{(n)}$ iga indeksi i korral.

2. Tasandil on antud n erinevat võrdse raadiusega ringjoont, millest ükski paar ei puutu teineteist, ning iga antud ringjoon lõikab vähemalt üht ülejäänutest. Tõesta, et neil ringjoontel on kokku vähemalt n erinevat lõikepunkti.

3. Olgu $n \geqslant 2$ ning $c_1, c_2, \ldots, c_n$ mittenegatiivsed reaalarvud, mille jaoks kehtib võrdus

   $$c_1c_2 + c_2c_3 + \ldots + c_{n-1}c_n + c_nc_1 = 1\ .$$

   Leia summa $S_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ vähim võimalik väärtus etteantud arvu n korral.

IMO'99 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 1.–2. mail 1999. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

Teine päev

4. Mängulauale, mis koosneb 30×30 ruudust, paigutatakse doominokivisid seni, kuni enam pole võimalik ühtki kivi juurde lisada (iga kivi katab kaks naaberruutu). Tõesta, et mängulaual on vähemalt 300 doominokivi.

5. Funktsioon f on määratud mistahes reaalarvulise argumendi x korral, omandab reaalarvulisi väärtusi ning sellel on järgmised omadused:

   a) mistahes reaalarvude x ja y korral kehtib võrdus

   $$f(x + f(y) + yf(x)) = y + f(x) + xf(y) ;$$

   b) suhe $\dfrac{f(x)}{x}$ omandab nullist erinevate reaalarvude x korral ainult lõpliku arvu erinevaid väärtusi.

   Leia kõik niisugused funktsioonid f.

6. Kolmnurga ABC siseringjoon keskpunktiga O puutub kolmnurga külge BC punktis K. Olgu N ja M vastavalt lõikude BC ja AK keskpunktid. Tõesta, et punktid M, O ja N paiknevad ühel sirgel.