Отборный конкурс в команду Эстонии на ММО'98

Тарту, 4–5 апреля 1998 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

Первый день

1. На стороне AB треугольника ABC выбирают точки C_1 и C_2 так, что точка C_2 расположена между точками C_1 и B. Аналогично выбирают на стороне BC точки A_1, A_2 и на стороне CA точки B_1, B_2 так, что точка A_2 расположена между точками A_1 и C, а точка B_2 расположена между точками B_1 и A. Пусть лучи C_2A_1 и B_1A_2 пересекаются в точке D, лучи A_2B_1 и C_1B_2 — в точке E, а лучи B_2C_1 и A_1C_2 — в точке F. Доказать, что равенства $\dfrac{|A_1A_2|}{|BC|} = \dfrac{|B_1B_2|}{|CA|} = \dfrac{|C_1C_2|}{|AB|}$ имеют место тогда и только тогда, когда $\dfrac{|B_2C_1|}{|EF|} = \dfrac{|C_2A_1|}{|FD|} = \dfrac{|A_2B_1|}{|DE|}$.

2. Пусть f — функция, определенная и монотонно возрастающая на всем множестве вещественных чисел и удовлетворяющая при всяком вещественном x условию $f(x^2) - x^2 = f(x) - x$. Найти все такие функции f.

3. Движение на перекрестке, где встречаются n дорог $(n \geqslant 3)$, организовано циклически чередующимися фазами, так что в течение каждой фазы разрешено движение только в некоторых направлениях. При этом выполнены следующие условия:
   1) Для любых двух различных дорог S и S' найдется фаза, когда можно ехать через перекресток с дороги S на дорогу S';
   2) Обозначим дороги на перекрестке в направлении против часовой стрелки как $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$, причем индексы подразумеваем "по модулю n", т.е. $S_n = S_0$ и т. д. Если в течении некоторой фазы можно ехать через перекресток с дороги S_i на какую-то другую дорогу S_j, то в течении той же фазы нельзя ехать с любой из дорог $S_{i+1}, \ldots, S_{j-1}$ на любую из дорог $S_j, \ldots, S_i$, а также с любой из дорог $S_j, \ldots, S_{i-1}$ на любую из дорог $S_{i+1}, \ldots, S_j$.

   Найти наименьшее возможное число фаз с различным порядком движения на этом перекрестке.

Отборный конкурс в команду Эстонии на ММО'98

Тарту, 4–5 апреля 1998 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

Второй день

4. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — вещественные числа, удовлетворяющие условиям $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n > 0$ и $y_1 \geqslant x_1$, $y_1 y_2 \geqslant x_1 x_2$, $\ldots$, $y_1 y_2 \ldots y_n \geqslant x_1 x_2 \ldots x_n$. Доказать, что $y_1 + y_2 + \ldots + y_n \geqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

5. Пусть k — фиксированное положительное целое число. Определим последовательность (E_n) соотношениями

$$E_1 = k + 1\,; \qquad E_{n+1} = E_n^2 - kE_n + k \quad (n \geqslant 1)\,.$$

Доказать, что все члены последовательности (E_n) попарно взаимно просты.

6. а) Внутри полосы между параллельными прямыми s_1 и s_2 выбирают четыре различные точки A, B, C и D так, что найдется четырехзвенная замкнутая ломаная, вершины которой попеременно лежат на прямых s_1 и s_2, а звенья проходят соответственно через точки A, B, C и D (в этом порядке), причем общий конец звеньев, проходящих через точки A и B, лежит на прямой s_1 (см. рисунок 1). Доказать, что если при данных точках A, B, C, D существует более одной такой ломаной, то таких ломаных имеется бесконечно много.

   б) Доказать аналогичное утверждение в случае, когда вместо прямых s_1 и s_2 рассматриваются лучи OM и ON, являющиеся сторонами некоторого угла MON, а точки A, B, C и D расположены внутри угла OMN (см. рисунок 2).

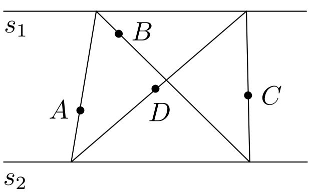

Рис. 1

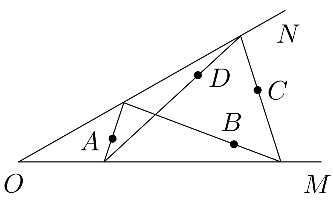

Рис. 2