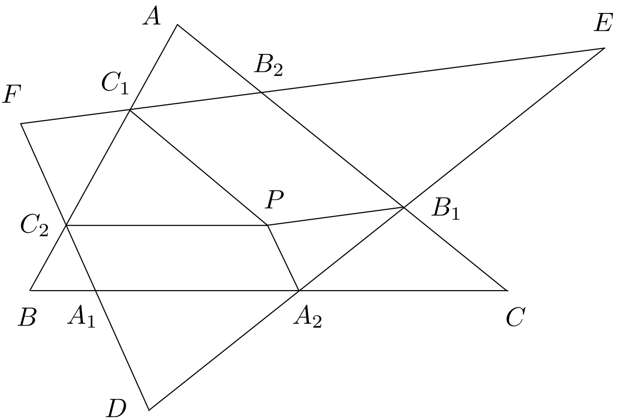
IMO'98 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 4.–5. aprillil 1998. a.

Ülesannete lahendused

Esimene päev

1. Ülesande püstituse sümmeetrilisuse tõttu kolmnurkade ABC ja DEF suhtes piisab tõestada, et võrdustest $\dfrac{|A_1A_2|}{|BC|} = \dfrac{|B_1B_2|}{|CA|} = \dfrac{|C_1C_2|}{|AB|}$ järelduvad võrdused $\dfrac{|B_2C_1|}{|EF|} = \dfrac{|C_2A_1|}{|FD|} = \dfrac{|A_2B_1|}{|DE|}$.

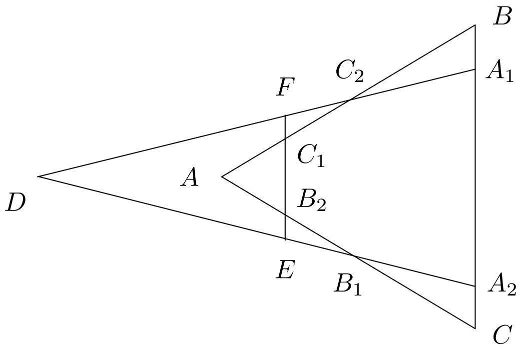


Joonis 1

Leiame kolmnurga ABC sisepiirkonnas punkti P, mille kaugus punktist C_1 on võrdne lõigu B_1B_2 pikkusega ning mille kaugus punktist C_2 on võrdne lõigu A_1A_2 pikkusega. Selline punkt on ainus (vt. joonist 1) ning tekkiv kolmnurk C_1C_2P on tingimuste $\dfrac{|A_1A_2|}{|BC|} = \dfrac{|B_1B_2|}{|CA|} = \dfrac{|C_1C_2|}{|AB|}$ tõttu sarnane kolmnurgaga ABC. Seega $C_2P \parallel A_1A_2$ ja $C_1P \parallel B_2B_1$ ning kuna vastavalt konstruktsioonile ka $|C_2P| = |A_1A_2|$ ja $|C_1P| = |B_2B_1|$, siis nelinurgad $C_2PA_2A_1$ ja $C_1PB_1B_2$ on rööpkülikud. Niisiis $PA_2 \parallel FD$ ja $B_1P \parallel EF$, s.t. kolmnurgad A_2B_1P ja DEF on sarnased. Et seejuures $|PA_2| = |C_2A_1|$ ja $|B_1P| = |B_2C_1|$, siis saamegi nõutavad võrdused

$$\frac{|B_2C_1|}{|EF|} = \frac{|C_2A_1|}{|FD|} = \frac{|A_2B_1|}{|DE|}.$$

Märkus: Võistlusel pakutud ülesande tekstis oli *kiirte* C_2A_1 ja B_1A_2 jne. lõikepunktide asemel ekslikult juttu vastavate *sirgete* lõikepunktidest. Sel juhul võib paraku juhtuda, et võrdused $\frac{|B_2C_1|}{|EF|} = \frac{|C_2A_1|}{|FD|} = \frac{|A_2B_1|}{|DE|}$ kehtivad, võrdused $\frac{|A_1A_2|}{|BC|} = \frac{|B_1B_2|}{|CA|} = \frac{|C_1C_2|}{|AB|}$ aga mitte. Vastav kontranäide on toodud joonisel 2; selle leidis ka üks võistlejatest.



Joonis 2

2. *Vastus:* $f(x) = x + a$, kus a on suvaline reaalarv.

Funktsioon $g(x) = f(x) - x$ rahuldab vastavalt ülesande tingimustele samasusi $g(x) \equiv g(x^2) \equiv g(-x)$ ning induktsiooni abil on lihtne näidata, et $g(x^{2^k}) = g(x) = g(x^{2^{-k}})$ mistahes reaalarvu $x > 0$ ja naturaalarvu k korral.

Näitame, et positiivsete argumentide korral on funktsioon g monotoonselt kasvav. Tõepoolest, olgu $0 < x \leqslant y$, siis funktsiooni f monotoonse kasvamise tõttu saame mistahes naturaalarvu k korral

$$\begin{aligned}0 &\leqslant f(y^{2^{-k}}) - f(x^{2^{-k}}) = g(y^{2^{-k}}) - g(x^{2^{-k}}) + y^{2^{-k}} - x^{2^{-k}} = \\ &= g(y) - g(x) + (y^{2^{-k}} - x^{2^{-k}}).\end{aligned}$$

Valides k küllalt suure, saame vahe $y^{2^{-k}} - x^{2^{-k}}$ muuta kuitahes väikeseks ning seega piirjuhul $k \to \infty$ saame võrratuse $g(y) - g(x) \geqslant 0$.

Veendume nüüd, et mistahes arvude $0 < x \leqslant y < 1$ korral kehtib võrdus $g(x) = g(y)$, s.t. funktsioon g on vahemikus $(0, 1)$ konstantne. Tõepoolest, küllalt suure naturaalarvu k korral saame võrratuse $y^{2^k} \leqslant x$, mistõttu $g(y) = g(y^{2^k}) \leqslant g(x) \leqslant g(y)$. Analoogiliselt veendume, et funktsioon g on konstantne ka vahemikus $(1, \infty)$.

Kahes eelmises lõigus tõestatu ning tingimuse $g(-x) = g(x)$ põhjal saame funktsiooni g esitada kujul

$$g(x) = \begin{cases} a\,, & \text{kui } x = 0\,; \\ b\,, & \text{kui } 0 < |x| < 1\,; \\ c\,, & \text{kui } |x| = 1\,; \\ d\,, & \text{kui } |x| > 1\,, \end{cases}$$

kus a, b, c, d on mingid reaalarvud ning $b \leqslant c \leqslant d$. Jääb üle näidata, et tegelikult $a = b = c = d$.

Funktsiooni f monotoonse kasvamise tõttu kehtivad mistahes naturaalarvu m korral võrratused

$$f\left(-1 - \frac{1}{m}\right) \leqslant f(-1) \leqslant f\left(-1 + \frac{1}{m}\right)$$

ja

$$f\left(-\frac{1}{m}\right) \leqslant f(0) \leqslant f\left(\frac{1}{m}\right)\,,$$

s.t.

$$g\left(-1 - \frac{1}{m}\right) - 1 - \frac{1}{m} \leqslant g(-1) - 1 \leqslant g\left(-1 + \frac{1}{m}\right) - 1 + \frac{1}{m}$$

ja

$$g\left(-\frac{1}{m}\right) - \frac{1}{m} \leqslant g(0) \leqslant g\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m}$$

ehk $d - 1 - \frac{1}{m} \leqslant c - 1 \leqslant b - 1 + \frac{1}{m}$ ja $b - \frac{1}{m} \leqslant a \leqslant b + \frac{1}{m}$. Piirjuhul $m \to \infty$ saame siit $d-1 \leqslant c-1 \leqslant b-1$ ja $b \leqslant a \leqslant b$, mis koos võrratustega $b \leqslant c \leqslant d$ annavadki, et $a = b = c = d$.

Niisiis peab funktsioon f olema kujul $f(x) = x + a$, kus a on mingi reaalarv; lihtne kontroll näitab, et kõik sellised funktsioonid rahuldavad tõepoolest ülesande tingimusi.

3. *Vastus:* n.

Kõigepealt paneme tähele, et n faasist piisab — näiteks võime igal faasil lubada sõita ühest teeotsast mistahes teisele teeotsale.

Oletame nüüd, et leidub $n-1$ faasiga liikluskorraldus, mis rahuldab ülesande tingimusi. Et teise tingimuse kohaselt ei saa ühe faasi ajal ühelegi teeotsale sõita rohkem kui ühest teeotsast, siis peab esimese tingimuse täidetuseks olema iga faasi ajal lubatud igale teeotsale kusagilt sõita (ühtlasi järeldub siit ka, et vähem kui $n-1$ faasiga liikluskorraldus pole võimalik). Nimetame edaspidi *k-järku parempöördeks* sõitu teeotsast S_i teeotsale S_{i+k} ning *k-järku vasakpöördeks* sõitu teeotsast S_i teeotsale S_{i-k} (meenutame, et indekseid vaatleme "modulo n"). Nagu eespool näidatud, peab mistahes niisugune pööre olema lubatud täpselt ühe faasi vältel.

Vaatleme faasi, mil on lubatud mingi esimest järku vasakpööre mingist teeotsast S_i teeotsale S_{i-1}. Et teeotsale S_i ei saa selle faasi ajal vastavalt teisele tingimusele sõita kusagilt mujalt peale teeotsa S_{i-1}, siis peab esimest järku parempööre $S_{i-1} \to S_i$ olema lubatud sellesama faasi ajal.

Vaatleme nüüd faasi, mil on lubatud teist järku parempööre $S_{i-1} \to S_{i+1}$ (vastavalt tingimusele $n \geqslant 3$ on $S_{i-1} \neq S_{i+1}$, s.t. selline faas on olemas). Teise tingimuse kohaselt ei tohi teeotsale S_i selle faasi ajal sõita kusagilt mujalt peale teeotsa S_{i-1} — seega peab sama faasi ajal olema lubatud esimest järku parempööre $S_{i-1} \to S_i$ ning vastavalt eelmises lõigus tõestatule järelikult ka esimest järku vasakpööre $S_i \to S_{i-1}$. Pöörete $S_{i-1} \to S_{i+1}$ ja $S_i \to S_{i-1}$ üheaegne lubatavus on aga vastuolus ülesande teise tingimusega — seega $n-1$ faasist ei piisa.

Märkus: Teine võimalus $n-1$ faasi mittepiisavuse näitamiseks on tõestada (näiteks induktsiooni abil) järgmine lemma:

LEMMA. *Kui mingi faasi ajal on lubatud igale teeotsale kusagilt sõita ning ükski tagasipööre (s.t. n-järku parempööre) ei ole lubatud, siis on selle faasi ajal lubatud vähemalt kaks erinevat esimest järku parempööret.*

Oletades nüüd, et leidub $n-1$ faasiga liikluskorraldus, näeme, et kõikide faaside ajal kokku on lubatud vähemalt $2\cdot(n-1) > n$ erinevat esimest järku parempööret, mis ei ole võimalik (vastavalt eespool tõestatule on $n-1$ faasiga liikluskorralduses iga niisugune parempööre lubatud parajasti ühe faasi ajal, seega peavad kõik need parempöörded olema erinevad).

Teine päev

4. Olgu $\dfrac{y_1}{x_1} = \alpha_1$, $\dfrac{y_2}{x_2} = \alpha_2$, ..., $\dfrac{y_n}{x_n} = \alpha_n$, siis vastavalt ülesande tingimustele $\alpha_1 \geqslant 1$, $\alpha_1\alpha_2 \geqslant 1$, ..., $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n \geqslant 1$. Meil on vaja tõestada, et

$$S = x_1(\alpha_1 - 1) + x_2(\alpha_2 - 1) + \ldots + x_n(\alpha_n - 1) \geqslant 0 .$$

Tähistame iga $i = 1, 2, \dots, n$ korral $S_i = (\alpha_1 - 1) + \ldots + (\alpha_i - 1)$, siis

$$\begin{aligned} S &= x_1S_1 + x_2(S_2 - S_1) + \ldots + x_n(S_n - S_{n-1}) = \\ &= S_1(x_1 - x_2) + S_2(x_2 - x_3) + \ldots + S_{n-1}(x_{n-1} - x_n) + S_nx_n . \end{aligned}$$

Et tegurid $x_1 - x_2$, $x_2 - x_3$, ..., $x_{n-1} - x_n$ ja x_n on kõik mittenegatiivsed, piisab tõestada, et $S_i \geqslant 0$ iga $i = 1, 2, \dots, n$ korral. See järeldub positiivsete arvude aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest:

$$S_i = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i) - i \geqslant i \cdot \sqrt[i]{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_i} - i \geqslant i \cdot 1 - i = 0 .$$

5. Tõestame algul induktsiooniga n järgi, et SÜT $(k, E_n) = 1$ iga $n = 1, 2, \dots$ korral. Tõepoolest,

$$\text{SÜT}\,(k, E_1) = \text{SÜT}\,(k, k+1) = \text{SÜT}\,(k, 1) = 1$$

ning kui SÜT $(k, E_n) = 1$, siis ka

$$\text{SÜT}\,(k, E_{n+1}) = \text{SÜT}\,(k, E_n^2 - kE_n + k) = \text{SÜT}\,(k, E_n^2) = 1 .$$

Näitame nüüd, et mistahes indeksite $n > m$ korral esitub jada liige E_n kujul $E_n = q_{nm}E_m + k$, kus q_{nm} on mingi täisarv. Tõepoolest, $n = m+1$ korral on see ilmne jada (E_n) määravast seosest ning kui $E_{m+r} = qE_m + k$, siis ka

$$E_{m+r+1} = E_{m+r}(E_{m+r} - k) + k = (qE_{m+r}) \cdot E_m + k .$$

Nüüd saame suvaliste indeksite $n > m$ korral

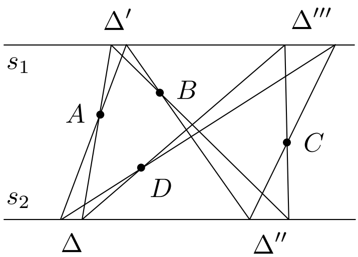
$$\text{SÜT}\,(E_n, E_m) = \text{SÜT}\,(q_{nm}E_m + k, E_m) = \text{SÜT}\,(k, E_m) = 1 .$$

Märkus: tingimus $k > 0$ ei ole tegelikult oluline — see tagab vaid, et nii ülesande püstituses kui ka lahenduses piisab vaadelda *positiivsete* täisarvude suurimat ühistegurit.

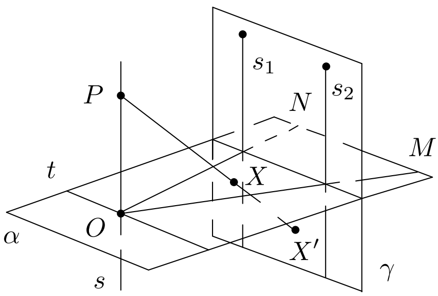
6. a) Olgu a_1, b_1, c_1 ja d_1 vastavalt punktide A, B, C ja D kaugused sirgest s_1 ning a_2, b_2, c_2 ja d_2 samade punktide kaugused sirgest s_2. Vaatleme kaht ülesande tingimustele vastavat murdjoont — olgu Δ nende punkte D ja A läbivate lülide ühiste otspunktide vahekaugus sirgel s_2 (vt. joonist 3). Punkte A ja B läbivate lülide ühiste otspunktide vahekaugus sirgel s_1 on siis $\Delta' = \frac{a_1}{a_2} \cdot \Delta$, punkte B ja C läbivate lülide ühiste otspunktide vahekaugus $\Delta'' = \frac{b_2}{b_1} \cdot \Delta'$ ning punkte C ja D läbivate lülide ühiste otspunktide vahekaugus $\Delta''' = \frac{c_1}{c_2} \cdot \Delta''$. Punkte D ja A läbivate lülide ühiste otspunktide vahekaugus Δ peab niisiis rahuldama võrdust

$$\Delta = \frac{d_2}{d_1} \cdot \Delta''' = \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \Delta \,,$$

s.t. $\frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} = 1$. See aga tähendab, et Δ väärtuse võime valida suvaliselt, s.t. sirge s_2 mistahes punktist alustades saame konstrueerida ülesande tingimustele vastava murdjoone.



Joonis 3



Joonis 4

b) Paiknegu vaadeldav nurk MON tasandil α. Valime tasandiga α ristuva tasandi γ nii, et nende tasandite lõikesirge lõikab nurga MON haarasid (vt. joonist 4). Valime sirgel s, mis on risti tasandiga α ja läbib punkti O, suvalise punkti $P \neq O$. Vaatleme projektsiooni tasandilt α tasandile γ, mille korral tasandi α mistahes punkti X kujutiseks on kiire OX lõikepunkt X' tasandiga γ (kui see lõikepunkt on olemas). On lihtne näha, et selle projektsiooni tulemusena kujutuvad kõik punktid tasandi α sellest pooltasandist, mille rajajooneks on tasandite α ja γ lõikejoonega paralleelne ja punkti O läbiv sirge t ning mis sisaldab nurka OMN, tasandi γ erinevateks punktideks. Seejuures kujutuvad kiired ON ja OM kaheks paralleelseks kiireks s_1 ja s_2, punktid A, B, C ja D nende vahelises ribas paiknevateks punktideks A', B', C' ja D' ning kumbki antud murdjoon ülesande a) osa tingimusi rahuldavaks murdjooneks punktide A', B', C' ja D' suhtes. Et iga ülesande a) osa tingimusi rahuldav murdjoon punktide A', B', C' ja D' suhtes, mille tipud paiknevad *kiirtel* s_1 ja s_2, on omakorda mingi ülesande b) osa tingimusi rahuldava murdjoone kujutiseks, siis vastavalt a) osas tõestatule on selliseid murdjooni lõpmata palju.