IMO'98 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 4.–5. aprillil 1998. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

Esimene päev

1. Kolmnurga ABC küljel AB valitakse punktid C_1 ja C_2 nii, et punkt C_2 paikneb punktide C_1 ja B vahel. Analoogiliselt valitakse küljel BC punktid A_1, A_2 ning küljel CA punktid B_1, B_2 nii, et punkt A_2 paikneb punktide A_1 ja C vahel ning punkt B_2 paikneb punktide B_1 ja A vahel. Lõikugu kiired C_2A_1 ja B_1A_2 punktis D, kiired A_2B_1 ja C_1B_2 punktis E ning kiired B_2C_1 ja A_1C_2 punktis F. Tõesta, et võrdused $\dfrac{|A_1A_2|}{|BC|} = \dfrac{|B_1B_2|}{|CA|} = \dfrac{|C_1C_2|}{|AB|}$ kehtivad siis ja ainult siis, kui $\dfrac{|B_2C_1|}{|EF|} = \dfrac{|C_2A_1|}{|FD|} = \dfrac{|A_2B_1|}{|DE|}$.

2. Olgu f kogu reaalarvude hulgal määratud ja monotoonselt kasvav funktsioon, mis rahuldab iga reaalarvu x korral tingimust $f(x^2)-x^2 = f(x)-x$. Leia kõik niisugused funktsioonid f.

3. Liiklus n teeotsaga ristmikul ($n \geqslant 3$) on korraldatud tsükliliselt vahelduvate faasidena, nii et iga faasi jooksul on lubatud liikumine ainult teatavates suundades. Seejuures on täidetud järgmised tingimused:
   1) Mistahes kahe erineva teeotsa S ja S' jaoks leidub faas, mille vältel tohib sõita üle ristmiku teeotsast S teeotsale S';
   2) Tähistame ristmikule suubuvad teeotsad kellaosuti liikumise vastassuunas lugedes $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$, kusjuures indekseid tõlgendame "modulo n", s.t. $S_n = S_0$ jne. Kui mingi faasi vältel tohib sõita üle ristmiku teeotsast S_i mingile teisele teeotsale S_j, siis sama faasi vältel ei tohi sõita ühestki teeotsast $S_{i+1}, \ldots, S_{j-1}$ ühelegi teeotsale $S_j, \ldots, S_i$ ega ühestki teeotsast $S_j, \ldots, S_{i-1}$ ühelegi teeotsale $S_{i+1}, \ldots, S_j$.

   Leia erineva liikluskorraldusega faaside vähim võimalik arv sellel ristmikul.

IMO'98 Eesti võistkonna valikvõistlus

Tartus, 4.–5. aprillil 1998. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

Teine päev

4. Olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ reaalarvud, mis rahuldavad tingimusi $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n > 0$ ning $y_1 \geqslant x_1$, $y_1 y_2 \geqslant x_1 x_2$, $\ldots$, $y_1 y_2 \ldots y_n \geqslant x_1 x_2 \ldots x_n$. Tõesta, et $y_1 + y_2 + \ldots + y_n \geqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

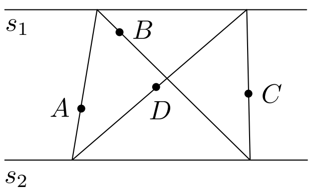
5. Olgu k fikseeritud positiivne täisarv. Defineerime jada (E_n) seostega

$$E_1 = k + 1\,; \qquad E_{n+1} = E_n^2 - kE_n + k \quad (n \geqslant 1)\,.$$

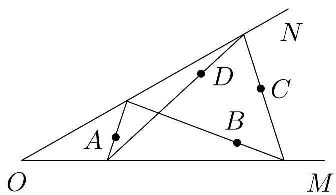
Tõesta, et jada (E_n) kõik liikmed on paarikaupa ühistegurita.

6. a) Paralleelsete sirgete s_1 ja s_2 vahelises ribas valitakse neli erinevat punkti A, B, C ja D nii, et leidub nelja lüliga kinnine murdjoon, mille tipud paiknevad vaheldumisi sirgetel s_1 ja s_2 ning lülid läbivad vastavalt punkte A, B, C ja D (selles järjekorras), kusjuures tippe A ja B läbivate lülide ühine otspunkt paikneb sirgel s_1 (vt. joonis 1). Tõesta, et kui antud punktide A, B, C, D korral leidub rohkem kui üks niisugune murdjoon, siis on selliseid murdjooni lõpmata palju.

   b) Tõesta analoogiline väide juhul, kui sirgete s_1 ja s_2 asemel on mingi nurga MON haaradeks olevad kiired OM ja ON ning punktid A, B, C ja D paiknevad nurga OMN sisepiirkonnas (vt. joonis 2).



Joonis 1



Joonis 2