Отборный конкурс

кандидатам в команду Эстонии на ММО'97

Тарту, 28–29 апреля 1997 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

Первый день

1. Точки A_1, B_1 ja C_1 являются соответственно серединами сторон BC, AC и AB треугольника ABC, а точки A_2, B_2 и C_2 — серединами его высот, проведенных соответственно из вершин A, B и C. Доказать, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

2. Доказать, что при любых положительных вещественных числах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{1+a_2}+\ldots+\dfrac{1}{1+a_n}}-\frac{1}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}\geqslant\frac{1}{n}\,.$$

   В каком случае здесь имеет место равенство?

3. На вечеринку собираются n парней, каждый со своей девушкой. В начале вечеринки все девушки присядут у стены круглого зала и на первый танец каждый парень приглашает одну из них. После каждого танца парни сопровождают свои партнерши на места и на следующий танец каждый из них приглашает следующую против часовой стрелки девушку. При каких значениях n можно так расположить девушек, чтобы во время каждого танца кто-то из парней танцевал со своей девушкой, если известно, что всего на вечеринке не менее n танцев?

Отборный конкурс

кандидатам в команду Эстонии на ММО'97

Тарту, 28–29 апреля 1997 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

Второй день

4. а) Можно ли разделить все вещественные числа, принадлежащие отрезку $[0,1]$, на два непересекающиеся множества A и B и определить *непрерывную* функцию $f(x)$ так, чтобы при любом числе x из множества A число $f(x)$ принадлежало множеству B и наоборот, при любом числе x из множества B число $f(x)$ принадлежало множеству A?

   б) Тот же вопрос, если отрезок $[0,1]$ заменить полуотрезком $[0,1)$.

5. На стороны AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, вне этого четырехугольника строятся прямоугольники, высоты которых равны соответственно длинам сторон CD, DA, AB и BC четырехугольника. Доказать, что четырехугольник, имеющий своими вершинами центры этих четырех прямоугольников, является прямоугольником.

6. Известно, что при любом целом $n>1$ среди чисел $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $2n-1$ имеется хотя бы одно простое число. Найти все положительные целые числа n, имеющие следующее свойство: каждое целое число $m>1$, меньшее числа n и взаимно простое с ним, является простым числом.