Valikvõistlus

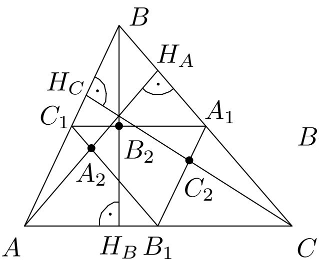
IMO'97 Eesti võistkonna kandidaatidele

Tartus, 28.–29. aprillil 1997. a.

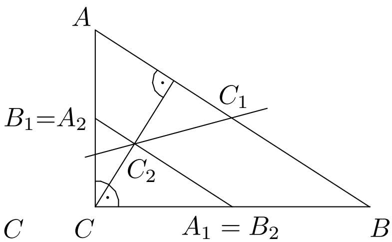
Ülesannete lahendused

Esimene päev

1. Paneme kõigepealt tähele, et punktid A_2, B_2 ja C_2 paiknevad vastavalt kolmnurga $A_1B_1C_1$ külgedega määratud sirgetel B_1C_1, A_1C_1 ja A_1B_1. Kui ükski punktidest A_2, B_2, C_2 ei lange kokku kolmnurga $A_1B_1C_1$ mõne tipuga, siis vastavalt Ceva teoreemile piisab meil tõestada, et $\dfrac{|C_1B_2|}{|B_2A_1|} \cdot \dfrac{|A_1C_2|}{|C_2B_1|} \cdot \dfrac{|B_1A_2|}{|A_2C_1|} = 1$ (vt. joonist 1).



Joonis 1



Joonis 2

Et $\dfrac{|C_1B_2|}{|B_2A_1|} = \dfrac{|AH_B|}{|H_BC|}$, $\dfrac{|A_1C_2|}{|C_2B_1|} = \dfrac{|BH_C|}{|H_CA|}$ ja $\dfrac{|B_1A_2|}{|A_2C_1|} = \dfrac{|CH_A|}{|H_AB|}$, kus H_A, H_B ja H_C on vastavalt kolmnurga ABC tippudest A, B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid, on see samaväärne võrdusega

$$\frac{|AH_B|}{|H_BC|} \cdot \frac{|BH_C|}{|H_CA|} \cdot \frac{|CH_A|}{|H_AB|} = 1 .$$

Selle võrduse kehtivus aga järeldub Ceva teoreemist ja sellest, et kolmnurga ABC kõrgused lõikuvad ühes punktis.

On lihtne veenduda, et punktid A_2, B_2, C_2 saavad langeda kokku kolmnurga $A_1B_1C_1$ tippudega ainult siis, kui kolmnurk ABC on täisnurkne.

Olgu täisnurga tipp C (vt. joonist 2), siis $A_2 = B_1$, $B_2 = A_1$ ja punkt A_2 paikneb lõigul $B_1C_1 = B_1B_2 = C_1C_2$, seega kehtib ülesande väide ka sel juhul.

2. *Vastus:* võrdus kehtib siis ja ainult siis, kui $a_1 = \ldots = a_n$.

Lahendus 1: Kasutame *Tšebõševi võrratust*:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} \leqslant \frac{x_1y_1 + \ldots + x_ny_n}{n}$$

mistahes reaalarvude $0 < x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ ja $0 < y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_n$ korral, kusjuures võrdus kehtib siis ja ainult siis, kui $x_1 = \ldots = x_n$ ja $y_1 = \ldots = y_n$.

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Võtame $x_i = \dfrac{1}{a_i}$ ja $y_i = \dfrac{1}{1+a_i}$, $i = 1, \ldots, n$, siis $x_iy_i = x_i - y_i$ ning Tšebõševi võrratusest saame

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}{n} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i}}{n} \leqslant \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i}\Big) .$$

Korrutades selle võrratuse mõlemaid pooli arvuga n ning jagades arvuga $\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i}\Big) \cdot \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1+a_i}\Big)$, saamegi ülesandes nõutud võrratuse.

Võrdus kehtib vastavalt esimeses lõigus öeldule siis ja ainult siis, kui $a_1 = \ldots = a_n$.

Lahendus 2: Tõestame ülesandes nõutud võrratusega

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i}} - \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \geqslant \frac{1}{n}$$

samaväärse võrratuse

$$n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} - n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} - \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i}\Big) \geqslant 0 , \tag{1}$$

mille saame, korrutades esialgse võrratuse mõlemad pooled läbi arvuga

$n \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i}\Big)$ ja viies kõik liikmed ühele poole.

Teisendame võrratuse vasakul pool olevat avaldist:

$$
\begin{aligned}
& n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} - n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} - \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i}\Big) = \\
&= n\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{1+a_i}\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i}\Big) = \\
&= n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(1+a_i)} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_k(1+a_i)} = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(1+a_i)} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_k(1+a_i)} = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} \cdot \Big(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_k}\Big) = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k+1}^{n} \bigg(\frac{1}{1+a_i} \cdot \Big(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_k}\Big) + \frac{1}{1+a_k} \cdot \Big(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_i}\Big)\bigg) = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k+1}^{n} \Big(\frac{1}{1+a_i} - \frac{1}{1+a_k}\Big) \cdot \Big(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_k}\Big) .
\end{aligned}
$$

Näeme, et iga indeksite paari i, j korral on sulgudes olevad tegurid ühemärgilised. Niisiis on saadud kahekordse summa kõik liidetavad mittenegatiivsed, s.t. võrratus (1) kehtib.

Võrdus kehtib esialgses võrratuses ja võrratuses (1) üheaegselt, s.o. parajasti siis, kui

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k+1}^{n} \Big(\frac{1}{1+a_i} - \frac{1}{1+a_k}\Big) \cdot \Big(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_k}\Big) = 0 .$$

Kuna viimase summa kõik liikmed on mittenegatiivsed, on see summa võrdne nulliga parajasti siis, kui kõik liidetavad on võrdsed nulliga, s.t. kõik arvud a_i on võrdsed.

3. *Vastus:* selline paigutus on võimalik paarituarvuliste n väärtuste korral.

Olgu mingi arvu n jaoks nõutud omadustega paigutus olemas. Nummerdame peole kogunenud *paarid* (s.t. nii noormehed kui ka nende tütarlapsed) arvudega $0, \ldots, n-1$ nii, et tütarlapsed on paigutatud päripäeva nende noormeeste numbrite kasvamise järjekorras, kellega nad tantsivad esimese tantsu. Iga arvu i $(0 \leqslant i < n)$ jaoks tähistagu $\sigma(i)$ selle tütarlapse numbrit, kellega i. noormees tantsib esimese tantsu. Siis mistahes indeksite i ja j korral tantsib numbriga $\sigma(i)$ tütarlaps j. tantsu noormehega number $i + j - 1 \pmod{n}$. Seega leidub ülesande tingimuste põhjal iga arvu $j = 1, \ldots, n$ jaoks selline arv i_j $(0 \leqslant i_j < n)$, et $\sigma(i_j) \equiv i_j + j - 1 \pmod{n}$ ehk $\sigma(i_j) - i_j \equiv j - 1 \pmod{n}$. Et erinevatele j väärtustele hulgast $\{1, \ldots, n\}$ vastavad seejuures erinevad arvud i_j hulgast $\{0, \ldots, n-1\}$ ja ilmselt

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sigma(i) = \sum_{i=0}^{n-1} i ,$$

siis mooduli n järgi saame

$$\frac{n(n-1)}{2} = \sum_{i=0}^{n-1} i = \sum_{j=1}^{n} (j-1) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} (\sigma(i) - i) = 0 .$$

Siit järeldame, et arv $n \cdot (n-1)$ jagub arvuga $2n$, ehk arv n peab olema paaritu.

Teiselt poolt, kui n on suvaline paaritu arv, siis paigutame tütarlapsed seina äärde nii, et esimese tantsu tantsib i. noormees $(i = 0, \ldots, n-1)$ tütarlapsega number $\sigma(i) \equiv 2i \pmod{n}$ (paneme tähele, et n paaritu-arvulisuse tõttu on selline tütarlaps olemas ja üheselt määratud). Siis j. tantsu $(j = 1, \ldots, n)$ tantsib koos paar number $i_j = j - 1$, sest $\sigma(i_j) - i_j \equiv 2i_j - i_j = j - 1 \pmod{n}$.

Teine päev

4. *Vastus:* a) ei ole võimalik; b) on võimalik.

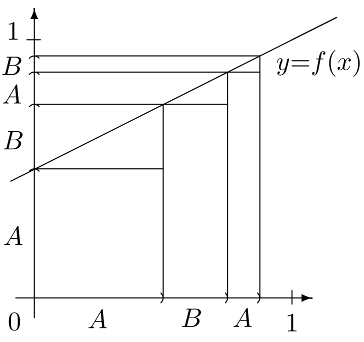
   a) Olgu alamhulgad A ja B ning pidev funktsioon $f(x)$ nõutavate omadustega. Et ilmselt $f(x) \neq x$ mistahes $0 \leqslant x \leqslant 1$ korral, siis $f(0) > 0$ ja $f(1) < 1$. Seega on *pideva* funktsiooni $g(x) = f(x) - x$ väärtused lõigu $[0, 1]$ otspunktides erineva märgiga ning seetõttu leidub niisugune arv a, $0 < a < 1$, mille korral $g(a) = 0$ ning $f(a) = a$. Saadud vastuolu näitab, et nõutavaid alamhulki A ja B ning funktsiooni $f(x)$ ei leidu.

b) Sobivad alamhulgad

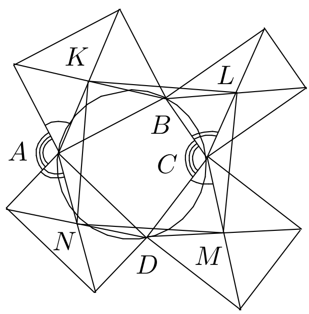
$$A = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right) \cup \left[\frac{15}{16}, \frac{31}{32}\right) \cup \ldots ,$$
$$B = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right) \cup \left[\frac{31}{32}, \frac{63}{64}\right) \cup \ldots$$

ja funktsioon $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (vt. joonist 3).

5. Olgu K, L, M ja N vastavalt nelinurga $ABCD$ külgedele AB, BC, CD ja DA konstrueeritud ristkülikute keskpunktid. Kuna nelinurga $ABCD$ vastaskülgedele konstrueeritud ristkülikud on ilmselt kongruentsed, siis on joonisel 4 ühe- ja kahekordsete kaarekestega tähistatud nurgad vastavalt võrdsed. Et $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$, siis on ka joonisel kolmekordsete kaarekestega tähistatud nurgad võrdsed ning seega on kolmnurgad KAN ja MCL kongruentsed ja $|KN| = |ML|$. Analoogiliselt tõestame, et ka kolmnurgad KBL ja MDN on kongruentsed, s.t. $|KL| = |MN|$ ja nelinurk $KLMN$ on seega rööpkülik.



Joonis 3



Joonis 4

Niisiis $\angle KLM = \angle KNM$, mistõttu võrduste

$$\angle KLM = \angle BLC + \angle KLB + \angle CLM , \tag{2}$$
$$\angle KNM = \angle AND - \angle KNA - \angle DNM \tag{3}$$

liitmisel saame

$$2\angle KLM = (\angle CLM - \angle KNA) + (\angle KLB - \angle DNM) +$$

$$+ \ (\angle BLC + \angle AND) =$$
$$= 0^\circ + 0^\circ + 180^\circ \ ,$$

kust $\angle KLM = 90^\circ$, s.t. nelinurk $KLMN$ on ristkülik.

Märkus: olenevalt sellest, millised lõikudest KL, LM, MN, NK lõikavad nelinurga $ABCD$ ümberringjoont ja millised mitte, võivad liidetavate märgid võrdustes (2) ja (3) siintoodutest erineda, kuid nende liitmisel saame liidetavad alati niiviisi paaridesse jaotada, et kahes paaris on summaks 0° ja kolmandas 180°.

6. *Vastus:* 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30.

Olgu $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ jada, mis sisaldab kasvavas järjestuses parajasti kõik algarvud. Tõestame kõigepealt, et $k \geqslant 4$ korral kehtib võrratus $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k > p_{k+1}^2$. Tõepoolest, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 > 11^2$ ning võrratusest $p_{k+1}^2 < p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ saame ülesande tekstis mainitud väidet kasutades, et

$$p_{k+2}^2 < 4 \cdot p_{k+1}^2 < 4 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k < p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot p_{k+1} \ .$$

Näitame nüüd, et ükski arv $n > 49$ ei saa olla nõutava omadusega. Selleks paneme tähele, et kui arv n on sellise omadusega ja $n > p_k^2$, siis n jagub algarvudega $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ning seega $n \geqslant p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, kuna vastasel juhul oleks mingi indeksi $i \leqslant k$ korral $\mathrm{SÜT}\,(p_i^2, n) = 1$, kus p_i^2 ei ole algarv. Olgu nüüd k selline indeks, et $p_k^2 < n \leqslant p_{k+1}^2$, siis $k \geqslant 4$ ja võrratusest $n \geqslant p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ järeldub vastavalt eespool tõestatule, et $n > p_{k+1}^2$ — vastuolu.

Nõutava omadusega arvud n leiame nüüd arvude $1, 2, \ldots, 49$ läbivaatamise teel ning arvestades, et *mistahes* k korral järeldub võrratusest $n > p_k^2$ arvu n jaguvus arvudega $p_1, p_2, \ldots, p_k$.